



TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

MARI SEPPÄNEN

GPS-SATELLIITIN RADAN ENNUSTAMINEN

Diplomityö

Tarkastaja: professori Robert Piché
Tarkastaja ja aihe hyväksytty
Luonnontieteiden ja ympäristötekniikan
tiedekunnan kokouksessa 13.01.2010

TIIVISTELMÄ

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma

SEPPÄNEN, MARI: GPS-satelliitin radan ennustaminen

Diplomityö, 62 sivua, 4 liitesivua

Maaliskuu 2010

Pääaine: Matematiikka: Matemaattinen mallinnus ja tieteellinen laskenta

Tarkastajat: professori Robert Piché

Avainsanat: GPS-satelliitti, jatkettu efemeridi, ennustus

Tässä työssä ennustetaan GPS-satelliitin rata muodostamalla satelliitille liikeyhtälö ja ratkaisemalla se numeerisesti käyttäen alkuarvoina GPS-satelliittien oikeita paikka- ja nopeustietoja. Liikeyhtälö muodostetaan kokoamalla kirjallisuudesta tietoa satelliittiin vaikuttavista voimista, joista valitaan tärkeimmät mukaan malliin. Työssä käsitellään myös laskennassa tarvittavia koordinaatistoja sekä numeerisia menetelmiä liikeyhtälön ratkaisuun.

Työ keskittyy selittämään, kuinka satelliitin rata voidaan ratkaista. Motivaationa on kuitenkin ollut kysymys, voisiko GPS-satelliitin rataa ennustaa erillisessä paikannuslaitteessa, missä ei ole jatkuvaa verkkoyhteyttä. Tämä nopeuttaisi paikannuslaitteen toimintaa sellaisessa tilanteessa, kun laite käynnistetään uudelleen sen oltua jonkin aikaa pois päältä. Jos laite edeltävällä käyttöjaksolla olisi ennustanut satelliittien radat valmiiksi, ei tarvitsisi odottaa satelliittien lähettämiä ratatietoja. Tällöin ensimmäinen paikkatieto saataisiin laskettua nopeasti, jopa 5 sekuntia laitteen käynnistymisen jälkeen, mikä olisi nykyiseen yli 30 sekunnin odotusaikaan verrattuna siedettävämpi käyttäjän kannalta.

Radan ennustamiseen esitettyä mallia testattiin käyttäen alkuarvoina sekä broadcast-efemeridejä, jotka ovat satelliittien itsensä lähettämiä ratatietoja, että tarkemmilla precise-efemerideillä, jotka lasketaan mittaustuloksia apuna käyttäen vasta jälkikäteen. Siten ne eivät ole paikannuslaitteen ulottuvissa ilman verkkoyhteyttä. Tarkemmilla alkutiedoilla tehdyt ennusteet onnistuivat kertomaan satelliitin paikan riittävän pienellä, alle 50 metrin virheellä, kun ennustuksen pituus oli yksi vuorokausi. Sen sijaan broadcast-efemeridillä tehdyt ennusteet jäivät kertaluokkaa huonommiksi, joten voidaan todeta ennustaminen ilman verkkoyhteyttä eli ilman tarkempia efemeridejä ongelmalliseksi. Lisäksi, vaikka tarkempaa efemeridiä olisikin mahdollista käyttää, olisi ennustuksen hyvä onnistua pidemmäksi ajaksi kuin vain vuorokaudeksi eteenpäin — eihän käyttäjä välttämättä avaa laitettaan ihan joka päivä. Jatkotutkimuksissa tulisi joko parantaa alkuarvon tarkkuutta tai keskittyä toisenlaisten, esimerkiksi tilastollisten, ennustusmallien kehittämiseen.

ABSTRACT

TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Master's Degree Programme in Science and Engineering

SEPPÄNEN, MARI: GPS satellite orbit prediction

Master of Science Thesis, 62 pages, 4 Appendix pages

March 2010

Major: Mathematics: Mathematical modelling and scientific computing

Examiner: Prof. Robert Piché

Keywords: GPS satellite, ephemeris extension, prediction

In this thesis the orbit of a GPS satellite is predicted by formulating its equation of motion and solving it numerically using GPS satellites real orbit data as initial condition. The forces acting on a satellite are found from the literature and the most important ones are included in the model. The thesis contains also a review of the reference frames used in calculation as well as the numerical methods for solving the equations of motion.

The motivation for the work was to determine whether it is possible to predict satellite orbits in a stand-alone navigation device having no continuous Internet connection. This would save time when turning on the device some hours after the last use. If the device had predicted satellite orbits in the previous usage session, the user would not need to wait to receive the orbit information, or ephemeris, from the satellite. In that case the time to first fix could decrease from typical 30 seconds to as little as 5 seconds, which would be more acceptable from the user's point of view.

The presented prediction model for GPS satellite orbits was tested with both broadcast ephemeris, that is sent by a satellite, and precise ephemeris, that is more accurate and can be calculated only afterwards using real measurements. With the initial values taken from the precise ephemeris the model was able to predict the satellite's position with under 50 meter error, which is acceptable, one day forwards. Unfortunately result was an order of magnitude worse when using the broadcast ephemeris, which is available to the navigation device without network connection. In addition, even if the precise ephemeris would be available to the device, it is desirable to get accurate positions for longer than just one day, in case the user does not open the device every day. In further study either more accurate ephemeris have to be found, or different prediction models e.g. statistical forecasting need to be developed.

Alkusanat

Tämä työ on tehty henkilökohtaisen paikannuksen algoritmien tutkimusryhmässä, joka toimii Tampereen teknillisen yliopiston matematiikan laitoksella. Työn on rahoittanut Nokia.

Haluan kiittää Tommi Perälää, joka tutkii itsekkin samaa aihetta ja opasti minut työssä alkuun. Hän on myös toteuttanut pääosan siitä MATLAB-ohjelmasta, jolla tein tämän työn testit. Kiitokset hänelle myös neuvoista ja keskusteluista työn aikana.

Haluan kiittää työn tarkastajaa, professori Robert Pichéä mielenkiintoisesta diplomityöaiheesta. Kiitokset myös Simo Ali-Löytyle ja Lauri Wirolalle työn lukemisesta ja kommentteista. Lopuksi haluan vielä kiittää koko muuta paikannusryhmää, vanhempiani ja poikaystävääni Miroa.

Tampere, 9. helmikuuta 2010

Mari Seppänen
Näyttämönkatu 4 B 15
33720 Tampere
mari.seppanen@iki.fi

Sisältö

1	Johdanto	1
2	Koordinaatistot	4
2.1	Perusteita	4
2.2	Standardikoordinaatistot	10
2.3	Muunnokset IERS:n koordinaatistojen välillä	12
2.3.1	Prekessio ja nutaatio	14
2.3.2	Maan pyöriminen	16
2.3.3	Napavariaatio	17
2.4	Tässä työssä käytettävistä koordinaatistoista	19
3	Satelliitin liikeyhtälö	23
3.1	Geopotentiaali	24
3.2	Kuu ja Aurinko	30
3.3	Auringon säteilypaine	33
3.4	Parametrin estimointi	35
3.5	Muut häiriöt	40
4	Liikeyhtälön numeerinen ratkaisu	42
4.1	Rungen ja Kuttan menetelmät	43
4.2	Rungen, Kuttan ja Nyströmin menetelmä	44
4.3	Ratkaisijan aika-askeleen valinta	46
4.4	Pohdiskelua integrointimenetelmistä	48
5	Satelliitin radan ennustaminen	50
5.1	Mallin testaus	50
5.2	Virhetekijöiden arviointia	53
6	Yhteenveto	56
	Viitteet	58
A	Kovarianssimatriiseja	63
B	Kertaluvun 12 Nyström-menetelmä	64

Lyhenteet

AGNSS	avustettu GNSS (Assisted GNSS)
BE	broadcast-efemeridi (Broadcast Ephemeris)
BIH	kansainvälinen aikavirasto (Bureau International de l'Heure)
CEP	tähtitieteellinen efemeridinapa (Celestial Ephemeris Pole)
CIO	konventinaalinen kansainvälinen origo (Conventional International Origin)
CTP	konventionaalinen terrestinen napa (Conventional Terrestrial Pole)
CTRS	konventionaalinen terrestinen järjestelmä (Conventional Terrestrial Reference System)
ECEF	Maakeskeinen, Maahan sidottu (Earth Centered, Earth Fixed)
ef	Maahan sidottu koordinaatisto (Earth Fixed)
EOP	Maan suuntausparametrit (Earth Orientation Parameters)
FK5	Fundamentaaluettelo 5, tähtien paikkojen perusluettelo (Fundamentalkatalog 5)
GAST	tähtiaika (Greenwich Apparent Sidereal Time)
GMST	Greenwichin keskitähtiaika (Greenwich Mean Sidereal Time)
GNSS	yhteisnimi kaikille satelliittipaikannusjärjestelmille: GPS, GLONASS, Galileo jne. (Global Navigation Satellite System)
GPS	maailmanlaajuinen satelliittipaikannusjärjestelmä (Global Positioning System)
IAU	kansainvälinen tähtitieteellinen unioni (International Astronomical Union)
ICRS	kansainvälinen tähtitieteellinen koordinaattijärjestelmä (International Celestial Reference System)
IERS	kansainvälinen Maan pyörimisen ja koordinaattijärjestelmien palvelu (International Earth Rotation and Reference Systems Service)
IGS	kansainvälinen GNSS-palvelu (International GNSS Service)
ILS	kansainvälinen leveysastepalvelu

	(International Latitude Service)
in	hetkellinen terrestinen järjestelmä (instantaneous terrestrial system)
ITP	kansainvälinen terrestinen napa (International Terrestrial Pole)
ITRS	kansainvälinen terrestinen järjestelmä (International Terrestrial Reference System)
JD	juliaaninen päivämäärä (Julian Date)
MATLAB	ohjelmisto numeeriseen laskentaan (matrix laboratory)
mod	keskiekvaattorin ja -tasauspisteen järjestelmä (mean equator and equinox of date)
NGA	Yhdysvaltain puolustusministeriön alainen tiedustelu- organisaatio ja kuvatiedusteluaineistoa käsittelevä virasto (National Geospatial-Intelligence Agency)
PE	precise-efemeridi (Precise Ephemeris)
PRN	näennäissatunnainen numero (Pseudo Random Number)
RK	Rungen ja Kuttan menetelmä
RKN	Rungen, Kuttan ja Nyströmin menetelmä
SI	kansainvälinen yksikköjärjestelmä (Système International d'Unités)
tod	aidon ekvaattorin ja tasauspisteen järjestelmä (true equator and equinox of date)
TTFF	aika ensimmäiseen paikannustulokseen (Time To First Fix)
UT1	yleisaika (Universal Time)
UTC	koordinoitu yleisaika (Coordinated Universal Time)
VSOP	hyvin pitkän ajan kuluessa ilmenevät muutokset planeettojen radoissa (Variations Séculaires des Orbites Planétaires)
WGS84	maailman geodeettinen järjestelmä (World Geodetic System 1984)

Merkinnät

$\vec{p}, \vec{r}, \vec{s}$	vektoreita
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	matriiseja
\mathbf{R}_A^B	muunnosmatriisi A:sta koordinaatistoon B
$\mathbf{R}_x(\alpha), \mathbf{R}_y(\alpha), \mathbf{R}_z(\alpha)$	muunnosmatriisit, jotka vastaavat kiertoja koordinaattiakselien ympäri kulman α verran
\mathbf{A}^T	matriisin \mathbf{A} transpoosi
\mathbf{A}^{-1}	matriisin \mathbf{A} inverssi
$\nabla f(\vec{r})$	funktion $f(\vec{r})$ gradientti
$f'(\vec{r})$	funktion $f(\vec{r})$ derivaatta
$df(\vec{r})/d\vec{r}$	funktion $f(\vec{r})$ derivaatta \vec{r} :n suhteen
$\partial f(\vec{r})/\partial x$	funktion $f(\vec{r})$ osittaisderivaatta x :n suhteen
\dot{f}	funktion f aikaderivaatta
\mathbf{P}	prekession muunnosmatriisi
\mathbf{N}	nutaation muunnosmatriisi
\mathbf{G}	Maan pyörimisen muunnosmatriisi
\mathbf{W}	napavariaation muunnosmatriisi
Υ	kevätpäiväntasauspiste
15°	15 astetta
15.3	15.3 kaarisekuntia
x_p, y_p	napavariaatioparametrit
$\vec{\omega}$	kulmanopeusvektori
G	gravitaatiovakio
M_E	Maan massa
R_E	Maan säde
$\rho(\vec{r})$	Maan tiheys
\vec{a}_g	Maan gravitaatiokiihtyvyys
P_n	Legendren polynomi
P_{nm}	Legendren liittopolynomi
δ_{nm}	Kroneckerin delta
C_{nm}, S_{nm}	geopotentialikertoimet

$\overline{C}_{nm}, \overline{S}_{nm}$	normalisoidut geopotentiaalikertoimet
Y_{nm}	palloharmoninen termi
V_{nm}	palloharmonisen termin reaali osa
W_{nm}	palloharmonisen termin imaginaari osa
$\mathcal{Re}(\cdot)$	reaali osa
$\mathcal{Im}(\cdot)$	imaginaari osa
\vec{a}_{kuu}	Kuun gravitaatiokiihtyvyys
\vec{a}_{aur}	Auringon gravitaatiokiihtyvyys
\vec{a}_{asp}	Auringon säteilypainesta johtuva kiihtyvyys
M	Kuun massa
m	satelliitin massa
P_f	Auringon säteilyn paine
P_0	Auringon säteilyn paine Maan etäisyydellä
A	satelliitin aurinkopaneelien pinta-ala
AU	astronominen yksikkö
ϵ	heijastuskerroin
α	säteilypaineparametri
λ	säteilypaineen varjostusfunktio
$E(\cdot)$	odotusarvo
\mathbf{P}_k	tilan k kovarianssimatriisi
$\hat{\vec{x}}$	tilavektorin \vec{x} odotusarvo
$(\vec{x})_i$	vektorin \vec{x} i. komponentti
$(\vec{x})_{i:j}$	vektorin \vec{x} komponentit i:stä j:hin
\mathbf{Q}	tilamallin virheen kovarianssimatriisi
\mathbf{R}	mittausmallin virheen kovarianssimatriisi
\mathbf{K}	kalmanin vahvistus
$\mathbf{I}^{n \times m}$	$n \times m$ identiteettimatriisi
$\mathbf{0}^{n \times m}$	$n \times m$ nollamatriisi
$\hat{\vec{x}}_k^-$	tilan $\hat{\vec{x}}_k$ priori-estimaatti
$\vec{v} \sim \mathcal{N}(\vec{\mu}, \mathbf{R})$	\vec{v} noudattaa normaali jakaumaa odotusarvolla $\vec{\mu}$ ja kovarianssimatriisilla \mathbf{R}
\forall	kaikkikvanttori

Luku 1

Johdanto

Global Positioning System (GPS) on paikannusjärjestelmä, jossa on kolme osaa: kontrolliverkko, satelliitit ja käyttäjät. Kontrolliverkkoon kuuluvat eri puolilla Maata sijaisevat tarkkailuasemat, sekä Colorado Springsin pääasema. Ne tarkkailevat satelliittien tilaa, ohjaavat niitä siirtymään tarvittaessa ja ennustavat niiden *efemeridin* (eng. ephemeris) eli rataparametrit, joiden avulla satelliitin paikka voidaan laskea. Kontrolliverkko lähettää ennustamansa efemeridit satelliiteille, jotka taas välittävät ne eteenpäin paikannusjärjestelmän käyttäjille. GPS-järjestelmässä satelliitit lähettävät samaa efemeridiä aina kahden tunnin ajan, minkä jälkeen rataparametrit vaihdetaan uudempiin. [32, s. 32-36; 46, s. 19]

GPS-järjestelmän käyttäjät tarvitsevat vastaanottimen, joka havaitsee satelliitin lähettämän signaalin. Signaali kertoo satelliitin senhetkisen efemeridin sekä ajanhetken, jolloin signaali lähetettiin satelliitista. Lähetysajan avulla saadaan laskettua signaalin kulkuaika t satelliitista vastaanottimeen, ja valonnopeudella kertomalla voidaan laskea satelliitin ja käyttäjän välinen etäisyys $s = ct$. Näissä molemmissa on mukana vielä satelliitin ja vastaanottimen kellojen erosta johtuva virhe, *bias*. Kun tunnetaan signaalin kulkuaika vähintään neljästä satelliitista, sekä näiden satelliittien efemeridit, saadaan bias sekä käyttäjän sijainti ratkaistua. [32, s. 200-204]

Nykyisten paikannuslaitteiden ongelmana on, että laite ei toimi heti käynnistyksen jälkeen, vaan siinä on noin 30 sekunnin viive parhaimmassakin tapauksessa [6; 29]. Tämä johtuu siitä, että signaalin havaitseminen ja seuraantaanotto sekä efemeridin lähetys vie oman aikansa. Satelliitilla kestää 12 sekuntia lähettää vastaanottimelle kaikki efemeridin rataparametrit, eikä se aloita uutta lähetystä kuin joka 30. sekunti [32, s. 128]. Jos vastaanotin sijaitsee paikassa, josta ei ole suoraa näköyhteyttä taivaalle vaan esimerkiksi puita tai korkeita rakennuksia esteenä, on signaali yleensä heikompi, jolloin sen havaitseminen ja seuraantaanotto hidastuu. Tällöin paikannus kestää vieläkin kauemmin, minuutteja. Sisätiloissa signaalin vastaanotto ei aina ole edes mahdollista. Laitteen käyttäjä ei välttämättä halua odottaa sijaintinsa selvitystä näin pitkään ja siksi on alettu miettiä keinoja, joilla käyttäjän ensimmäisten paikkakoordinaattien selvitykseen kuluva aika saataisiin vähennettyä. Tästä ajasta käytetään usein lyhennettä TTFF (Time to First Fix).

Koska efemeridien pitkä vastaanottoaika on suurin syy pitkälle TTFF-ajalle, on ongelmaa yritetty korjata ennustamalla satelliittien efemeridejä etukäteen. Tällöin satelliittien paikat ovat paikannuslaitteen tiedossa jo laitetta käynnistettäessä, joten satelliittiyhteyttä tarvitaan vain signaalin kulkuajan selvitykseen. Satelliitin kellon kellonajan lähettäminen käy hyvin nopeasti ja satelliitti lähettää sen efemeridiä useammin, joka kuudes sekunti [32, s. 128]. Niinpä satelliittien rataa ennustamalla voidaan paikkatieto laskea usein jo alle 5 sekuntia laitteen käynnistytksen jälkeen.

Satelliittien sijainnin tunteminen etukäteen voi nopeuttaa paikkatiedon selvitystä myös toisella tapaa sen lisäksi, että satelliittien lähettämiä efemeridiä ei tarvitse odottaa: Oletetaan, että laitteella on tiedossa summittainen arvio käyttäjän senhetkisestä sijainnista maapallolla sekä riittävän tarkka aika. Jos nyt tunnetaan vielä satelliittien sijainnit, voidaan laskea, mitkä GPS-satelliiteista ovat sillä puolen maapalloa, että niiden signaalia on ylipäättään mahdollista kuulla. Kun näkyvien satelliittien joukko tiedetään, ei kaikkia satelliitteja tarvitse edes yrittää kuunnella. Puhutaan hakuavaruuden pienenemisestä. Tällöin satelliittien seurantaanotto ja sitä myöten myös TTFF nopeutuu. Tavallisesti hakuavaruutta pienennetään käyttämällä navigointiviestiin kuuluvaa *almanakkaa* eli rataparametreja, jotka toimivat pidemmällä aikavälillä paremmin kuin tavallinen efemeridi. Almanakka on kuitenkin niin epätarkka, ettei sen perusteella voida paikantaa. Se on tarkoitettu ainoastaan näkyvien satelliittien ennustamiseen. Lisätietoa hakuavaruudesta sekä sen pienentämisestä muilla keinoilla voi lukea lähteistä [32, s. 449-450] ja [55, s. 69-70].

Hyvän TTFF-ajan takaamiseksi moni satelliittipaikannuslaitteita tai -tuotteita tarjoava yritys on viime vuosina kehittänyt tapoja saada laitteisiinsa efemeridien ennusteita. Ensimmäisissä ratkaisuissa ratojen ennustaminen suoritettiin tietokoneella, jossa sekä laskentatehoa että muistia riittää, ja siirrettiin sitten paikannuslaitteeseen verkkoyhteyden avulla. Näin tehdään esimerkiksi Nemerix:n patenttoimassa ratkaisussa [13]. Myös Global Locate, SiRF ja moni muu yritys kehitti vastaavia tapoja saada efemeridejä laitteisiinsa. Niissä kaikissa on kuitenkin ongelmana, että ne eivät toimi ilman verkkoyhteyttä, vaan paikannuslaite pitää kytkeä esimerkiksi tietokoneeseen noin kerran viikossa ennusteiden saamiseksi.[29]

Uudemmissa ratkaisuissa satelliitin paikka ennustetaan suoraan paikannuslaitteessa. Kun laite edeltävän kerran on käynnissä ja vastaanottaa efemeridejä, niin niitä tallennetaan ja niiden avulla tehdään ennusteet. Kun laite joidenkin tuntien tai jopa päivien päästä avataan uudelleen, ovat satelliittien paikkatiedot valmiina. Tämä on aiempia ratkaisuja haastavampaa, sillä ennustusalgoritmin on oltava laskennallisesti riittävän kevyt laitteen prosessorille, eikä muistinkulutuskaan saa kasvaa mahdottoman suureksi. Onnistuneita ennustusmalleja on kuitenkin jo käytössä tuotteissa: Rx Networks:n GPStreamTM:a ja SiRF:n SiRFInstantFixIITM:a mainostetaan yritysten kotisivuilla [49; 54]. Myös MediaTek on tehnyt äskettäin oman tutkimuksensa aiheesta [60].

Tavallisesti satelliitin rataa ennustetaan mallintamalla satelliittiin vaikuttavia voimia ja muodostamalla liikeyhtälö, jota sitten integroidaan numeerisesti. Differentiaaliyhtälön numeerinen integrointi on kuitenkin raskasta. Tätä valitellaankin

artikkeleissa [29] ja [61], jotka käsittelevät efemeridien ennustusta erillisessä paikannuslaitteessa. Näistä ensimmäisessä Mattos kirjoittaa vaihtoehtoisesta tavasta ennustaa efemeridejä: tarkastellaan rataparametrien muutoksia päivästä toiseen ja mallinnetaan niitä. Tällöin tulevat rataparametrit voidaan extrapoloida eikä numeerista integrointia tarvita. Toinen artikkelista sen sijaan kertoo ennustusalgoritmistä, missä rata integroidaan numeerisesti, ja tehokkuutta on pyritty nostamaan tekemällä liikeyhtälöstä mahdollisimman yksinkertainen. Myös tässä työssä radan ennustaminen tehdään tällä tavalla.

Tämän työn tavoitteena on muodostaa malli, jonka avulla satelliittien ratoja voitaisiin ennustaa paikannuslaitteessa, jossa ei ole jatkuvaa verkkoyhteyttä. Ennustuksessa ei siis voida käyttää apuna sellaista tietoa, mikä on laitteen ulottumattomissa. Mallia testataan tässä työssä ainoastaan tietokoneella, joten paikannuslaitteen muita rajoituksia: laskentatehoa ja muistikapasiteettia, ei oteta juuri huomioon. Toki kaikki tarpeeton pyritään jättämään mallista pois muistia ja laskenta-aikaa viemästä. Ennustuksen pituuden on oltava niin pitkä, että käyttäjä ehtii avata laitteensa sitä useammin. Tässä työssä tarkastellaan erityisesti yhden ja neljän vuorokauden mittaisia ennusteita.

Tavallisessa paikannuslaitteen käyttötilanteessa käyttäjä liikkuu kaupungin kadulla ja yrittää suunnistaa risteyksestä oikeaan suuntaan. Tällöin alle puolen korttelin, noin 50 metrin, paikannustarkkuus riittää määrittämään oikean risteyksen ja käyttäjän sijainnin [29]. Paikannustarkkuus ei ole sama kuin satelliitin paikkaennustuksen tarkkuus, mutta oletetaan että ne olisivat samaa suuruusluokkaa ja asetetaan tämän työn ennustuksen tavoitteeksi 50 m satelliitin paikassa. Todellisuudessa paikannustarkkuuteen vaikuttaa satelliittien sijaintien tarkkuuden lisäksi muutkin seikat, kuten käytettyjen satelliittien asetelma eli geometria taivaalla ja etenkin kellotarkkuus. Aiemmin mainittiinkin jo vastaanottimen ja satelliittien kellojen välinen bias, joka on selvitettävä. Sen ratkaiseminen ei ole ongelma, mutta valitettavasti satelliittien kellot eivät ole täysin synkronoituja GPS:n systeemiajan kanssa. Tätä seikkaa korjatakseen satelliitti lähettää efemeridin lisäksi myös *kellokorjaustermejä*, jotka kertovat satelliitin kellonajan suhteessa GPS-aikaan [46, s. 73]. Näitä kellokorjauksia ei voida ennustaa, eivätkä ne välttämättä toimi niin kauaa, että voitaisiin käyttää edeltävällä käyttöjaksolla vastaanotettuja kellokorjauksia. Niinpä todellista paikannustarkkuutta saattaa rajoittaa kellojen tarkkuus, vaikka satelliittien rata voitaisiinkin ennustaa tarkasti. Tässä työssä keskitytään vain efemeridin ennustamiseen ja efemeridin virheeseen, eikä tarkastella paikannusvirhettä, joka riippuu paljon siitä, miten hyvin aika tai erilaiset aikaerot tunnetaan. Varsinainen paikannustarkkuus jääköön jatkotutkimukseksi.

Työn rakenne on seuraavanlainen: Luku 2 käsittelee koordinaatistoja, joita satelliitin rataa laskiessa käytetään. Luvussa 3 tarkastellaan satelliittiin vaikuttavia voimia, ja muodostetaan sille liikeyhtälö. Luvussa 4 esitetään ja vertaillaan numeerisia menetelmiä tämän liikeyhtälön, joka on toisen asteen differentiaaliyhtälö, ratkaisemiseen. Luvussa 5 testataan mallia sekä tarkastellaan saatuja tuloksia ja luvussa 6 tehdään vielä yhteenvedo.

Luku 2

Koordinaatistot

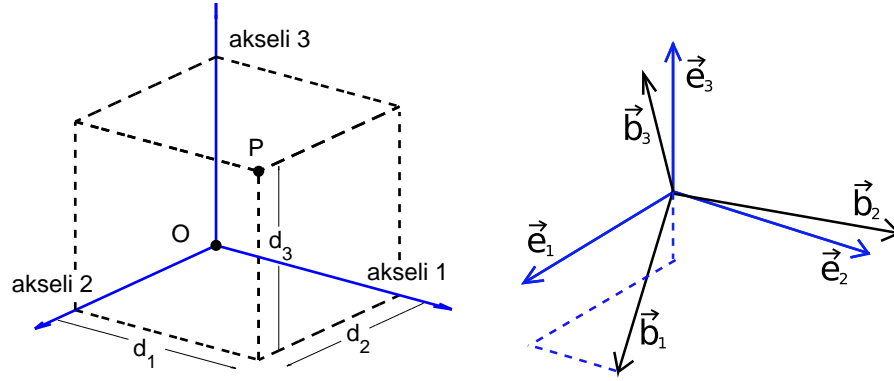
GPS-satelliitin kiertoradan tarkkailussa ja laajemmin koko astronomiassa käsitellään fysikaalisia suureita useassa eri koordinaatistossa. Maahan sidottu koordinaatisto on luonnollisesti yksi näistä, sillä täältä Maasta käsin niin GPS-satelliitit kuin taivaankappaleetkin havaitaan. Myös Maan gravitaatiokenttä on yksinkertaisinta esittää Maahan sidotussa koordinaatistossa. Toisaalta, Maahan sidotussa koordinaatistossa on omat hankaluutensa. Se nimittäin ei ole, Maan pyörimisen vuoksi, inertiaalikoordinaatisto, joten koulufysiikasta tutut Newtonin lait eivät päde siinä. Lisäksi muun muassa taivaankappaleiden radat ovat varsin monimutkaisia Maahan sidotussa koordinaatistossa, kun taas inertiaalikoordinaatistossa ne ovat hyvin lähellä yksinkertaisia ellipsejä.

Eri koordinaatistojen käytölle on siis olemassa syynsä: Näin paikkaa, nopeutta, voimaa tai muuta fysikaalista suuretta voidaan käsitellä siinä koordinaatistossa, missä se onnistuu helpoiten. Tässä luvussa tarkastellaan koordinaatistoja, koordinaatistosta toiseen siirtymistä, sekä joitakin globaaleissa paikannusjärjestelmissä käytettäviä standardikoordinaatistoja. Luvun lopussa esitellään vielä tarkemmin, minkälaisia koordinaatistoja tässä työssä käytetään.

2.1 Perusteita

Aloitetaan esittelemällä työssä käytettäviä notaatioita, määritellään koordinaatistoihin liittyviä peruskäsitteitä ja kirjoitetaan ylös koordinaatistoihin liittyviä perustuloksia, joihin myöhemmin viitataan.

Koordinaatisto (eng. reference frame) on origosta ja yleensä suorakulmaisista akselista koostuva systeemi, jonka avulla pisteen P paikka voidaan esittää. Pisteen esitys jossakin koordinaatistossa on avaruuden \mathbb{R}^3 vektori $(d_1, d_2, d_3)^T$, missä d_i kertoo pisteen etäisyyden origosta akselin i suuntaan, kuvan 2.1 -mukaisesti. Lukuja d_i kutsutaan myös pisteen P *koordinaateiksi*.



Kuva 2.1: Vasemmalla: Koordinaatisto koostuu origosta O sekä akseleista. Piste P paikka saadaan esitettyä koordinaattien d_i avulla. Oikealla: Koordinaatiston B akselit voidaan esittää koordinaatiston A akselien \vec{e}_i suuntaisten komponenttien avulla.

Merkitään koordinaattivektoreita jatkossa lihavoiduilla pienillä kirjaimilla \vec{r} , \vec{s} , \vec{p} jne. Paikkavektorin lisäksi ne voivat kuvata mitä tahansa muutakin vektoria kuten nopeutta tai kiihtyvyyttä. Merkitään myös vektoriarvoisia funktioita lihavoiduilla nuolellisilla kirjaimilla, kuten $\vec{F}(\cdot)$ ja merkitään matriiseja lihavoiduilla isoilla kirjaimilla \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} jne.

Tarkastellaan sitten koordinaatiston vaihtoa. Rajoitutaan suorakulmaisiin koordinaatistoihin, joiden skaala on sama, eli pisteiden väliset etäisyyden eivät muutu koordinaatistonmuunnoksessa. Lisäksi oletetaan, että koordinaatistoilla on yhteinen origo. Olkoon lähtökoordinaatiston nimi A , loppukoordinaatiston B , ja olkoon vektorin \vec{r} esitykset näissä koordinaatistoissa \vec{r}_A ja \vec{r}_B . Tällöin koordinaatistojen välistä muunnosmatriisia merkitään \mathbf{R}_A^B ja se toteuttaa yhtälön

$$\vec{r}_B = \mathbf{R}_A^B \vec{r}_A. \quad (2.1)$$

Näytetään seuraavaksi, kuinka matriisi \mathbf{R}_A^B voidaan esittää koordinaatistojen A ja B akselien välisten kulmien funktiona. Samalla todetaan, että muunnosmatriisi toiseen suuntaan saadaan transponoimalla, eli $\vec{r}_A = \mathbf{R}_B^A \vec{r}_B = (\mathbf{R}_A^B)^T \vec{r}_B$.

Tarkastellaan tilannetta A :n koordinaateissa. Tällöin A :n koordinaattiakselit osoittavat yksikkövektoreiden \vec{e}_i suuntiin, ja paikkavektori voidaan ilmaista näiden kantavektoreiden avulla

$$\vec{r}_A = (\vec{r}_A)_1 \vec{e}_1 + (\vec{r}_A)_2 \vec{e}_2 + (\vec{r}_A)_3 \vec{e}_3. \quad (2.2)$$

Merkintä $(\vec{r}_A)_i$ tarkoittaa vektorin i . komponenttia. Kun tarkastellaan kahden koordinaatiston välisiä muunnoksia, on kätevää valita toinen näistä koordinaatistoista tarkastelukoordinaatistiksi. Tällöin sen kanta on luonnollinen $\{\vec{e}_i\}$, kuten nyt A :lla.

Koordinaatiston B akselit ovat A -koordinaatistossa katsottuna suunnissa \vec{b}_i , kuten kuvasta 2.1 näkyy. Valitaan \vec{b}_i :t siten, että ne ovat yksikkövektoreita. Lisäksi,

koska käsittelemme nyt suorakulmaisia koordinaatistoja, ovat $\vec{\mathbf{b}}_i$ ortogonaalisia. Nyt vektori $\vec{\mathbf{r}}_A$ voidaan ilmaista kantavektoreiden $\{\vec{\mathbf{b}}_i\}$ ja koordinaattivektorin $\vec{\mathbf{r}}_B$ avulla:

$$\vec{\mathbf{r}}_A = (\vec{\mathbf{r}}_B)_1 \vec{\mathbf{b}}_1 + (\vec{\mathbf{r}}_B)_2 \vec{\mathbf{b}}_2 + (\vec{\mathbf{r}}_B)_3 \vec{\mathbf{b}}_3 = \mathbf{R}_B^A \vec{\mathbf{r}}_B \quad (2.3)$$

Yhdistämällä yhtälöt (2.2) ja (2.3) saadaan

$$(\vec{\mathbf{r}}_A)_1 \vec{\mathbf{e}}_1 + (\vec{\mathbf{r}}_A)_2 \vec{\mathbf{e}}_2 + (\vec{\mathbf{r}}_A)_3 \vec{\mathbf{e}}_3 = (\vec{\mathbf{r}}_B)_1 \vec{\mathbf{b}}_1 + (\vec{\mathbf{r}}_B)_2 \vec{\mathbf{b}}_2 + (\vec{\mathbf{r}}_B)_3 \vec{\mathbf{b}}_3. \quad (2.4)$$

Kirjoitetaan sitten kukin yksikkövektori $\vec{\mathbf{b}}_j$ vektoreiden $\vec{\mathbf{e}}_1$, $\vec{\mathbf{e}}_2$ ja $\vec{\mathbf{e}}_3$ suuntaisten komponenttien vektorisummana, kuvan 2.1 havainnollistamaan tapaan. Vektorin $\vec{\mathbf{b}}_j$ projektio vektorilla $\vec{\mathbf{e}}_i$ on $\cos(\vec{\mathbf{b}}_j, \vec{\mathbf{e}}_i) \vec{\mathbf{e}}_i$, missä $\cos(\vec{\mathbf{b}}_j, \vec{\mathbf{e}}_i)$ tarkoittaa vektoreiden $\vec{\mathbf{b}}_j$ ja $\vec{\mathbf{e}}_i$ välisen kulman kosinia. Niinpä

$$\vec{\mathbf{b}}_j = \sum_{i=1}^3 \cos(\vec{\mathbf{b}}_j, \vec{\mathbf{e}}_i) \vec{\mathbf{e}}_i, \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}. \quad (2.5)$$

Eliminoidaan vektorit $\vec{\mathbf{b}}_j$ yhtälöryhmästä (2.5) yhtälön (2.4) avulla, jolloin

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 (\vec{\mathbf{r}}_A)_i \vec{\mathbf{e}}_i &= \left((\vec{\mathbf{r}}_B)_1 \cos(\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{e}}_1) + (\vec{\mathbf{r}}_B)_2 \cos(\vec{\mathbf{b}}_2, \vec{\mathbf{e}}_1) + (\vec{\mathbf{r}}_B)_3 \cos(\vec{\mathbf{b}}_3, \vec{\mathbf{e}}_1) \right) \vec{\mathbf{e}}_1 \\ &+ \left((\vec{\mathbf{r}}_B)_1 \cos(\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2) + (\vec{\mathbf{r}}_B)_2 \cos(\vec{\mathbf{b}}_2, \vec{\mathbf{e}}_2) + (\vec{\mathbf{r}}_B)_3 \cos(\vec{\mathbf{b}}_3, \vec{\mathbf{e}}_2) \right) \vec{\mathbf{e}}_2 \\ &+ \left((\vec{\mathbf{r}}_B)_1 \cos(\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{e}}_3) + (\vec{\mathbf{r}}_B)_2 \cos(\vec{\mathbf{b}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3) + (\vec{\mathbf{r}}_B)_3 \cos(\vec{\mathbf{b}}_3, \vec{\mathbf{e}}_3) \right) \vec{\mathbf{e}}_3. \end{aligned}$$

Kertoimet vektoreiden $\vec{\mathbf{e}}_i$ edessä voidaan asettaa yhtäsuuriksi ja muodostaa yhtälö

$$\vec{\mathbf{r}}_A = \begin{pmatrix} \cos(\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{e}}_1) & \cos(\vec{\mathbf{b}}_2, \vec{\mathbf{e}}_1) & \cos(\vec{\mathbf{b}}_3, \vec{\mathbf{e}}_1) \\ \cos(\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2) & \cos(\vec{\mathbf{b}}_2, \vec{\mathbf{e}}_2) & \cos(\vec{\mathbf{b}}_3, \vec{\mathbf{e}}_2) \\ \cos(\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{e}}_3) & \cos(\vec{\mathbf{b}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3) & \cos(\vec{\mathbf{b}}_3, \vec{\mathbf{e}}_3) \end{pmatrix} \vec{\mathbf{r}}_B.$$

Havaitaan, että saatu matriisi on lausekkeen (2.3) \mathbf{R}_B^A , joka on ortonormaali. Tällöin se on ei-singulaarinen ja $(\mathbf{R}_B^A)^{-1} = (\mathbf{R}_B^A)^T$ [45, s. 66]. Saadaan alunperin haettu muunnosmatriisi

$$\mathbf{R}_A^B = (\mathbf{R}_B^A)^T = \begin{pmatrix} \cos(\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{e}}_1) & \cos(\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2) & \cos(\vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{e}}_3) \\ \cos(\vec{\mathbf{b}}_2, \vec{\mathbf{e}}_1) & \cos(\vec{\mathbf{b}}_2, \vec{\mathbf{e}}_2) & \cos(\vec{\mathbf{b}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3) \\ \cos(\vec{\mathbf{b}}_3, \vec{\mathbf{e}}_1) & \cos(\vec{\mathbf{b}}_3, \vec{\mathbf{e}}_2) & \cos(\vec{\mathbf{b}}_3, \vec{\mathbf{e}}_3) \end{pmatrix}.$$

Tätä kutsutaan myös suuntakosinimatriisiksi [1, s. 15].

Suuntakosinimatriisi on peräti yhdeksän kulman funktio. Kuitenkin, vain kolme näistä kulumista ovat riippumattomia [2, s. 199]. Matriisi voidaankin hajottaa koordinaattiakselien x , y ja z suhteen tehtäviksi kolmeksi kierroksi. Jos kulmat α , β ja

γ mittaavat pyörähdyskulmaa akselien ympäri oikeakätiseen kiertosuuntaan, niin kiertoja vastaavat matriisit ovat

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_x(\alpha) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, & \mathbf{R}_y(\beta) &= \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}, \\ \mathbf{R}_z(\gamma) &= \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (2.6)$$

Mikä tahansa rotaatiomatriisi saadaan esitettyä näiden kolmen matriisin tulona. Tarkastelemalla matriisien sarakkeita on helppo havaita, että ne ovat ortonormaaleja, ja niinpä matriiseille $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$.

Yhtälö (2.1) kertoo, kuinka koordinaattivektorin voi muuntaa koordinaatistosta toiseen muunnosmatriisin \mathbf{R}_A^B avulla. Mikäli vektorin sijasta halutaankin muuntaa vektorimuuttujan vektoriarvoinen funktio $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})$, tapahtuu se kaavalla

$$\vec{\mathbf{F}}_B(\vec{\mathbf{r}}_B) = \mathbf{R}_A^B \vec{\mathbf{F}}_A(\mathbf{R}_B^A \vec{\mathbf{r}}_B).$$

Tämä kaava on hyödyllinen sellaisessa tilanteessa, missä funktiota $\vec{\mathbf{F}}$ on hankala esittää koordinaatistossa B, mutta koordinaatistossa A se on yksinkertaista. Tällöin vektorin $\vec{\mathbf{F}}_B(\vec{\mathbf{r}}_B)$ laskeminen voidaan tehdä yllä olevan kaavan avulla. Ensin pitää muuntaa argumenttivektori A-koordinaatistoon, sitten laskea funktion arvo $\vec{\mathbf{F}}_A(\vec{\mathbf{r}}_A)$, ja lopuksi vielä muuntaa saatu tulos takaisin koordinaatistoon B. Skalaarifunktiota muunnettaessa riittää, kun vaihdetaan argumentin koordinaatistoa, jolloin

$$f_B(\vec{\mathbf{r}}_B) = f_A(\mathbf{R}_B^A \vec{\mathbf{r}}_B). \quad (2.7)$$

Tarkastellaan sitten lyhyesti gradienttia

$$\nabla f(\vec{\mathbf{r}}) = (f'(\vec{\mathbf{r}}))^T = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)^T.$$

Derivoinnin ketjusääntöä (KS) käyttäen saadaan

$$\begin{aligned}\nabla_B f_B(\vec{\mathbf{r}}_B) &= [f'_B(\vec{\mathbf{r}}_B)]^T \stackrel{(2.7)}{=} \left[(f_A(\mathbf{R}_B^A \vec{\mathbf{r}}_B))' \right]^T \\ &\stackrel{(KS)}{=} [f'_A(\mathbf{R}_B^A \vec{\mathbf{r}}_B) \mathbf{R}_B^A]^T = \mathbf{R}_A^B \nabla_A f_A(\mathbf{R}_B^A \vec{\mathbf{r}}_B).\end{aligned}$$

Eli lyhyesti

$$\nabla_B f_B(\vec{\mathbf{r}}_B) = \mathbf{R}_A^B \nabla_A f_A(\vec{\mathbf{r}}_A). \quad (2.8)$$

Gradientti uudessa koordinaatistossa saadaan siis laskemalla ensin gradientti vanhassa koordinaatistossa, ja muuntamalla saatu vektori uuteen koordinaatistoon

matriisin \mathbf{R}_A^B avulla. Tämä tarkoittaa sitä, että gradientti on koordinaatistoriippumaton. [48, s. 10]

Tässä työssä koordinaatistot liikkuvat toistensa suhteen, sillä Maa on kokoajan liikkeessä avaruuden suhteen. Tällöin muunnosmatriisi riippuu ajasta, eli hetkellä t

$$\vec{\mathbf{r}}_B(t) = \mathbf{R}_A^B(t)\vec{\mathbf{r}}_A.$$

Tässä vektori $\vec{\mathbf{r}}_A$ on *stationäärinen* eli ajasta riippumaton koordinaatistossa A, mutta aikariippuva muunnos tekee siitä ei-stationäärisen koordinaatistossa B. Samalla lailla funktiot voivat olla stationäärisiä toisessa koordinaatistossa ja ajasta riippuvia toisessa:

$$\begin{aligned} f_B(\vec{\mathbf{r}}_B, t) &= f_A(\mathbf{R}_B^A(t)\vec{\mathbf{r}}_B(t)) \\ \vec{\mathbf{F}}_B(\vec{\mathbf{r}}_B, t) &= \mathbf{R}_A^B(t)\vec{\mathbf{F}}_A(\mathbf{R}_B^A(t)\vec{\mathbf{r}}_B(t)). \end{aligned}$$

Keskitytään sitten tarkemmin tapaukseen, jossa toinen koordinaatisto on inertiaalikoordinaatisto, ja toinen pyörii inertiaalikoordinaatistoon nähden akselin $\vec{\omega}$ ympäri tasaisella kulmanopeudella $\|\vec{\omega}\|$. Tarkastellaan mitä tahansa pyörivän koordinaatiston pistettä (tai vektoria) $\vec{\mathbf{p}}$. Inertiaalikoordinaatistosta katsottuna piste ei pysy paikallaan, vaan pyörii akselin $\vec{\omega}$ ympäri. Pisteen nopeus riippuu sitä kuvaavan vektorin $\vec{\mathbf{p}}$ ja akselin $\vec{\omega}$ välisestä kulmasta, sekä vektorin $\vec{\mathbf{p}}$ pituudesta p : $v = p\omega \sin(\vec{\mathbf{p}}, \vec{\omega})$. Sen suunta on vektorin $\vec{\mathbf{p}}$ ja akselin $\vec{\omega}$ virittämää tasoa vastaan kohtisuorassa. Niinpä pisteen nopeus voidaan kirjoittaa ristitulona:

$$\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\mathbf{p}}. \quad (2.9)$$

Tämä kaava pätee mille tahansa vektorille. [24, s. 105-106]

Seuraavaksi tarkastellaan kiinteän vektorin tai pisteen sijaan ajasta riippuvaa vektoria $\vec{\mathbf{p}}$ pyörivässä koordinaatistossa. Yksikkövektoreiden $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}$ ja $\vec{\mathbf{k}}$ avulla kirjoitetaan se on

$$\vec{\mathbf{p}} = p_x\vec{\mathbf{i}} + p_y\vec{\mathbf{j}} + p_z\vec{\mathbf{k}}. \quad (2.10)$$

Kun tämä derivoidaan ajan suhteen, pitää ottaa huomioon, että ajassa muuttuvien koordinaattien p_i lisäksi myös vektorit $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}$ ja $\vec{\mathbf{k}}$ pyörivät suhteessa inertiaalikoordinaatistoon. Kaikkien vektorien muunnos noudattaa kaavaa (2.9), joten $\vec{\mathbf{p}}$:n derivaataksi saadaan

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} &= \frac{d}{dt} (p_x\vec{\mathbf{i}} + p_y\vec{\mathbf{j}} + p_z\vec{\mathbf{k}}) \\ &= \left(\dot{p}_x\vec{\mathbf{i}} + \dot{p}_y\vec{\mathbf{j}} + \dot{p}_z\vec{\mathbf{k}} \right) + \left(p_x\frac{d\vec{\mathbf{i}}}{dt} + p_y\frac{d\vec{\mathbf{j}}}{dt} + p_z\frac{d\vec{\mathbf{k}}}{dt} \right) \\ &= \dot{\vec{\mathbf{p}}} + \vec{\omega} \times (p_x\vec{\mathbf{i}} + p_y\vec{\mathbf{j}} + p_z\vec{\mathbf{k}}) \\ &= \dot{\vec{\mathbf{p}}} + \vec{\omega} \times \vec{\mathbf{p}} \end{aligned}$$

Jos \vec{p} kuvaa esineen paikkaa, niin todellinen nopeus eli inertiaalikoordinaatistossa havaittu nopeus saadaan, kun lasketaan paikkavektorin nopeus $\dot{\vec{p}}$ pyörivässä koordinaatistossa havaittuna ja lisätään siihen $\vec{\omega} \times \vec{p}$. [24, s. 108]

Merkitään sitten äsken tarkasteltua pyörivää koordinaatistoa B:llä ja inertiaalikoordinaatistoa A:lla. Inertiaalikoordinaatistossa vektorin derivaatta on todellinen nopeus $d\vec{p}_A/dt$, ja niinpä todellinen nopeus B-koordinaatiston koordinaattivektorina on $\mathbf{R}_A^B d\vec{p}_A/dt$. Edellä esitetyn nopeuden muunnoskaavan perusteella

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_A^B \frac{d\vec{p}_A}{dt} &= \dot{\vec{p}}_B + \vec{\omega} \times \vec{p}_B \quad \parallel \cdot \mathbf{R}_B^A \\ \Leftrightarrow \frac{d\vec{p}_A}{dt} &= \mathbf{R}_B^A \left(\dot{\vec{p}}_B + \vec{\omega} \times \vec{p}_B \right) \\ \Leftrightarrow \frac{d\vec{p}_A}{dt} &= \mathbf{R}_B^A \dot{\vec{p}}_B + \mathbf{R}_B^A \vec{\omega} \times \vec{p}_B. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Toisaalta $d\vec{p}_A/dt$ voidaan laskea myös näin [1, s. 17]:

$$\frac{d\vec{p}_A}{dt} = \frac{d(\mathbf{R}_B^A \vec{p}_B)}{dt} = \dot{\mathbf{R}}_B^A \vec{p}_B + \mathbf{R}_B^A \dot{\vec{p}}_B. \quad (2.12)$$

Vertaamalla lausekkeitä (2.11) ja (2.12) nähdään, että muunnosmatriisin derivaatan on oltava

$$\dot{\mathbf{R}}_B^A = \mathbf{R}_B^A (\vec{\omega} \times),$$

missä $(\vec{\omega} \times)$ on ristitulon matriisimuoto [1, s. 16]

$$(\vec{\omega} \times) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Jos siis koordinaatisto B pyörii koordinaatistoon A nähden kulmanopeudella $\vec{\omega}$, niin tällöin nopeus koordinaatistossa A, eli \vec{v}_A saadaan laskettua B-koordinaatistossa havaitun nopeuden \vec{v}_B avulla seuraavasti:

$$\begin{aligned} \vec{v}_A &= \mathbf{R}_B^A \vec{v}_B + \dot{\mathbf{R}}_B^A \vec{p}_B \\ &= \mathbf{R}_B^A \vec{v}_B + \mathbf{R}_B^A \vec{\omega} \times \vec{p}_B. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Sama muunnos toiseen suuntaan saadaan ratkaisemalla tästä yhtälöstä \vec{v}_B . Edelleen B pyörii koordinaatistoon A nähden kulmanopeudella $\vec{\omega}$ ja tällöin

$$\vec{v}_B = \mathbf{R}_A^B \vec{v}_A - \vec{\omega} \times \vec{p}_B. \quad (2.14)$$

Lauseke voidaan muokata myös muotoon

$$\begin{aligned} \vec{v}_B &= \mathbf{R}_A^B \vec{v}_A - \vec{\omega} \times (\mathbf{R}_A^B \vec{p}_A) \\ &= \mathbf{R}_A^B (\vec{v}_A - \vec{\omega} \times \vec{p}_A). \end{aligned}$$

2.2 Standardikoordinaatistot

Koordinaattijärjestelmä (eng. reference system) on joukko suureita, jotka kertovat, kuinka koordinaatisto tulisi määritellä, sijoittaa ja suunnata. Koordinaattijärjestelmien määrittelystä ja ylläpidosta vastaavat erilaiset standardijärjestöt. Tässä luvussa kerrotaan koordinaattijärjestelmistä ja tutustutaan erityisesti IERS:n (International Earth Rotation and Reference Systems Service) määrittelemiin koordinaatistoihin.

Kun koordinaatisto on jonkin koordinaattijärjestelmän mukainen, sanotaan sitä järjestelmän realisaatioksi. Käytännössä koordinaatistojärjestelmä on se ideaalinen koordinaatisto, mikä voi esimerkiksi määrätä x -akselin osoittamaan kohti nollameridiaania. Kun tästä järjestelmästä otetaan realisaatio, eli tehdään koordinaatisto, mitataan nollameridiaanin paikka useasta eri tukikohdasta. Mittausten avulla muodostetaan nollameridiaanin paikasta pienimmän neliösumman estimaatti, jonka perusteella koordinaatiston x -akselin suunta lopulta määrätään. [32, s. 94; 46, s. 43-44]

Maahan kiinnitetyt koordinaatistot

Käytännössä kaikkien Maahan sidottujen, globaalien koordinaatistojen pohjana on *konventionaalinen terrestinen järjestelmä*, CTRS (Conventional Terrestrial Reference System) [46, s. 77]. Se määritellään seuraavasti [32, s. 94; 46, s. 82]:

CTRS:n määritelmä 2.2.1. *CTRS on suorakulmainen koordinaatisto, jonka*

- *origo on Maan massakeskipisteessä*
- *z -akseli osoittaa konventionaaliseen terrestiseen napaan, CTP:hen*
- *x -akseli osoittaa keskimääräiseen (nolla)meridiaaniin ja y -akseli asetetaan niin, että se täydentää oikeakätisen koordinaatistojärjestelmän.*

Määritelmässä on pari selitystä kaipaavaa termiä: *keskimääräinen nollameridiaani* ja *konventionaalinen terrestinen napa*, CTP. Keskimääräisellä nollameridiaanilla tarkoitetaan yksinkertaisesti sitä nollameridiaania, joka saadaan laskettua useasta tukiasemasta mitattujen nollameridiaanien perusteella. CTP puolestaan on eräänlainen vertailunapa, josta kerrotaan seuraavaksi hieman tarkemmin.

Maahan kiinnitetyssä, eli maan mukana pyörivässä, koordinaatistossa olisi hyvä, jos määritelty z -akseli osoittaisi Maan todellisen pyörimisakselin suuntaan. Maan pyörimisakseli ei kuitenkaan pysy Maan kuoreen nähden vakiona, vaan vaeltaa ympyrämäistä rataa Maan pintaa pitkin. Liike koostuu kahdesta jaksollisesta komponentista, joista ensimmäistä kutsutaan Chandlerin termiksi (jakso 435 vrk) ja toista vuotuiseksi termiksi (jakso 365.25 vrk) [34, s. 184]. Lisäksi napa liikkuu hiljalleen y -suunnassa. Näiden kaikkien tekijöiden yhteisvaikutusta kutsutaan *napavariaatioksi* (eng. polar wander). [32, s. 93]

Navan jatkuvasta liikkeestä johtuen on haluttu määritellä Maan kuoreen kiinnitetty vertailunapa. Konventionaalinen terrestinen napa, CTP (Conventional Terrestrial Pole), on tällainen, ja se on määritelty Maan navan keskimääräiseksi paikaksi vuosina 1900-1905. Napavariaatiota kuvataan aina tähän napaan verraten.

CTP:stä on olemassa oikeastaan kaksi määrittelyä [34, s. 183]. Vanhempi on International Latitude Servicen (ILS) mittausten perusteella asetettu CIO (Conventional International Origin). Myöhemmin Bureau International de l'Heure hyväksyi toisen määritelmän, BIH-navan. Nykyään standardijärjestö IERS käyttää napaa, joka alunperin suunnattiin BIH-navan kanssa, *epookilla* 1984.0 [30, s. 24-25]. Tähtitieteessä epookki (eng. epoch) tarkoittaa ajanhetkeä, jolloin ilmoitetut koordinaatit pitävät paikkansa. Vertailunapaa näkee kutsuttavan myös ITP:ksi (International Terrestrial Pole) sekä CEP:ksi (Celestial Ephemeris Pole). Sillä on useita nimiä.

Huomautettakoon vielä, että napavariaatio ei suinkaan ole ainoa Maan pyörimisnapaa siirtävä ilmiö, vaan myös *prekessio* ja *nutaatio* vaikuttavat siihen. Nämä kaksi ilmiötä poikkeavat napavariaatiosta, koska ne pystytään selittämään varsin hyvin ja siten ne ovat myös ennustettavissa. Prekessiosta ja nutaatiosta kerrotaan tarkemmin kappaleessa 2.3.1.

Kansainvälinen terrestinen järjestelmä, ITRS

On olemassa monta koordinaatistojärjestelmää, ja vielä useampia koordinaatistoja, jotka ovat CTRS:n mukaisia. GPS-satelliitit lähettävät ratatietonsa WGS84-koordinaatistojärjestelmässä (World Geodetic System 1984) [6; 36]. Käsitellään kuitenkin nyt tarkemmin IERS:n ylläpitämää ITRS-järjestelmää, joka on myös CTRS:n mukainen, ja jonka realisaatiot ovat nykyään senttimetrin tarkkuudella yhtenevät WGS84-järjestelmän realisaatioiden kanssa. Tämän työn päämääriin riittää, kun oletetaan saapuneen WGS84 rataparametrien olevan ITRS:n mukaisessa koordinaatistossa. [46]

ITRS-koordinaatiston z -akseli osoittaa CIO:a ja x -akseli keskimääräistä nollameridiaania kohti, kuten CTRS:n mukaisissa koordinaattijärjestelmissä kuuluukin. Kuten aiemmin todettiin, on CIO ja siten myös z -akseli Maan kuoreen sidottu. Samoin x -akseli sidotaan Maahan. Monesti tätä järjestelmää kutsutaankin lyhenteellä ECEF (Earth Centered Earth Fixed), eli Maahan sidotuksi koordinaatistoksi. Koska Maan pyörimisakseli liikkuu Maan kuoreen nähden, niin tarvitaan myös sellainen koordinaatisto, jonka z -akseli osoittaa täsmälleen pyörimisakselin suuntaan. Tästä kerrotaan lisää kappaleessa 2.3

Inertiaalikoordinaatisto ICRS

Inertiaalikoordinaatistolla tarkoitetaan koordinaatistoa, joka ei ole kiihtyvässä liikkeessä avaruuden suhteen. Yksi tällainen on standardijärjestö IERS:n ylläpitämä

ICRS (International Celestial Reference System). Tämän koordinaatiston origo on ITRS:n tavoin Maan massakeskipisteessä, mutta akselien suunnat on sidottu Maan kuoren sijasta tähtiin ja kvasaareihin. Ne eivät siis pyöri Maan mukana.

Aiemmin käytössä ollut FK5-järjestelmä ei määritellyt akselien suuntia tähtien perusteella, vaan Maan ekvaattoritasen asennosta saatiin z -akseli, ja ekvaattoritasen sekä *ekliptikan* eli ratatasen leikkauspiste määräsi suunnan x -akselille. Nämä piti tietysti määritellä tietyllä epookilla, sillä Maan ekvaattoritaso muuttuu ajan myötä precession ja nutaation takia. Myöhemmin, kun muodostettiin uusi, tähtiin sidottu järjestelmä, haluttiin se määritellä yhteensopivaksi vanhan järjestelmän kanssa. Niinpä ICRS:n x -akselin suunta on kevätpäiväntasauspiste (ekvaattorin ja ekliptikan leikkauspiste) epookilla J2000.0 ja z -akseli soittaa saman epookin navan suuntaan. Epookilla J2000.0 tarkoitetaan ajankohtaa 1. tammikuuta 2000, klo 12. [52, s. 12-16; 46, s. 64-65]

Jos ollaan tarkkoja, ei maakeskeinen koordinaatisto ole inertiaalikoordinaatisto, sillä Maan keskus on kiihtyvässä liikkeessä Maan kiertäessä Auringon ympäri. Tällainen koordinaatisto on kuitenkin yleensä riittävän hyvä approksimaatio inertiaalikoordinaatistosta. Sitä kutsutaan kvasi-inertiaalikoordinaatistoksi.

2.3 Muunnokset IERS:n koordinaatistojen välillä

Standardijärjestö IERS vastaa sekä ITRS- että ICRS-järjestelmistä, ja julkaisee parametreja, joiden avulla voidaan tehdä muunnokset näiden kahden koordinaatiston välillä. Kappaleessa 2.1 määriteltiin koordinaatistomuunnosmatriisi. Samassa kappaleessa esitetyin merkinnöin

$$\vec{\mathbf{r}}_{\text{ITRS}}(t) = \mathbf{R}_{\text{ICRS}}^{\text{ITRS}}(t)\vec{\mathbf{r}}_{\text{ICRS}}.$$

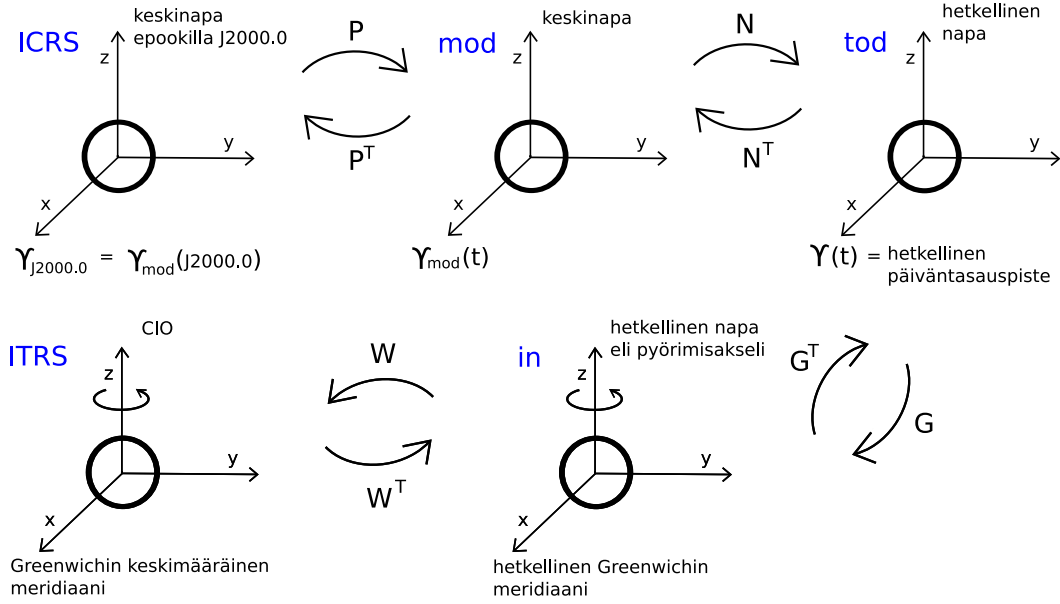
Muunnosmatriisi $\mathbf{R}_{\text{ICRS}}^{\text{ITRS}}$ esitellään kirjallisuudessa yleensä 3-4 matriisin tulona, joista kukin kuvaa tiettyä ilmiötä. Otetaan nyt käyttöön mm. Monterbruckin ja Gillin kirjassa [34] esiintyvät neljä muunnosmatriisia:

$$\mathbf{R}_{\text{ICRS}}^{\text{ITRS}}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{G}(t)\mathbf{N}(t)\mathbf{P}(t).$$

Tässä matriisit \mathbf{W} , \mathbf{G} , \mathbf{N} ja \mathbf{P} kuvaavat napavariaatiota, Maan pyörimisliikettä, nutaatiota sekä prekessiota, siinä järjestyksessä. Kun paikkavektoria $\vec{\mathbf{r}}_{\text{ICRS}}$ lähdetään muuntamaan ITRS-koordinaatistoon matriisi kerrallaan, niin kukin välivaihe on myös oma koordinaatistonsa. Välivaiheita on mahdollista käyttää, ja niitä käytetäänkin eri sovelluksissa.

Kuvasta 2.2 näkyvät välivaiheet koordinaatistomuunnoksessa ICRS-ITRS. Näistä välivaihekoordinaatistoista on kerrottu selkeästi M.C. Santoksen väitöskirjaan perustuvassa teknisessä raportissa [50]. Ensimmäinen koordinaatisto on ICRS, joka esiteltiin jo aiemmin. Sen akselit ovat sidotut tähtiin, mutta ne on samalla asetettu

yhteneviksi epookin J2000.0 keskinavan ja keskipäiväntasauspisteen kanssa. Kuvassa päiväntasauspisteitä on merkitty kreikkalaisella kirjaimella Υ .



Kuva 2.2: Muunnos ICRS:stä ITRS:ään

Kun ICRS-koordinaatistosta halutaan koordinaatistoon, jossa z -akseli on yhtenevä Maan senhetkisen pyörimisakselin kanssa, ja x -akseli senhetkisen päiväntasauspisteen kanssa, pitää koordinaatistoon lisätä prekessio- ja nutaatioliike. Tätä kutsutaan aidon ekvaattorin ja tasauspisteen järjestelmäksi (tod, true equator and equinox of date). Jos vain prekessioliike lisätään, muttei nutaatiota, puhutaan keskiekvaattorin ja -tasauspisteen järjestelmästä (mod, mean equator and equinox of date).

Tod-järjestelmä on yhä inertiaali, ja tämä järjestelmä onkin monesti se, jota suositellaan käytettäväksi numeerisessa integroinnissa. Jos integrointikoordinaatistoksi on valittu tod-järjestelmä hetkellä t_0 , niin yhteys sen ja ITRS:n välillä noudattaa yhtälöä [50]

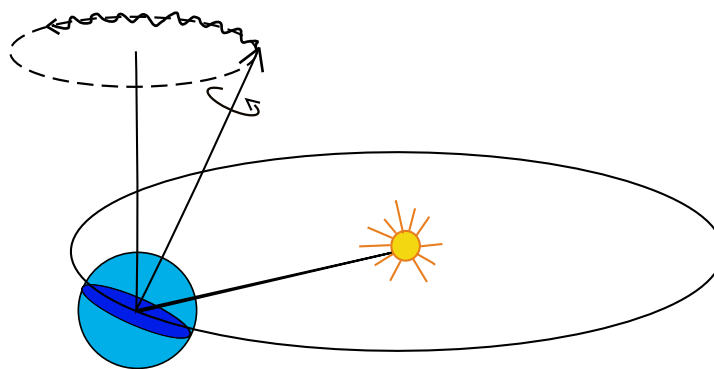
$$\vec{r}_{\text{ITRS}}(t) = \mathbf{W}(t) \mathbf{G}(t) \mathbf{N}(t) \mathbf{P}(t) (\mathbf{N}(t_0) \mathbf{P}(t_0))^T \vec{r}_{\text{tod}(t_0)}.$$

Kun tod-järjestelmästä halutaan siirtyä edelleen Maan mukana pyörivään koordinaatistoon, on kerrottava matriisilla \mathbf{G} , joka kääntää koordinaatiston x -akselin suuntaa päiväntasauspisteestä Υ_t Maan senhetkisen nollameridiaanin suuntaan. Viimeisenä siirrytään tästä hetkellisestä terrestisestä järjestelmästä (eng. instantaneous terrestrial system) eli in-järjestelmästä ITRS-järjestelmään kertomalla napavarioraatiomatriisilla \mathbf{W} . Myös tämä koordinaatisto on pyörivässä liikkeessä, mikä onkin merkitty kuvaan nuolen avulla.

Seuraavaksi esitellään tarkemmin muunnosmatriiseihin liittyviä ilmiöitä ja esitetään kaavat matriisien muodostamiseksi. Lisätietoja löytyy IERS:n julkaisemista raporteista, kuten [30], sekä satelliittien kiertoratojen laskemista käsittelevistä kirjoista [34; 52].

2.3.1 Prekessio ja nutaatio

Maa ei ole täysin pallon muotoinen, vaan navoilta hieman litistynyt pyörähdysellipsoidi, joten sen massa on jakautunut päiväntasaajalle painottuen. Lisäksi Maan pyörähdysakseli on noin 23.5° astetta kallellaan ekliptikaan eli ratatasoon nähden [23]. Niinpä auringon gravitaatiovoima aiheuttaa vääntömomentin, joka pyrkii kääntämään Maan ekvaattoritason samansuuntaiseksi Maan ratatason kanssa. Tämä ei Maan pyörimisliikkeen vuoksi onnistu, vaan sen sijaan pyörimisakseli kiertyy. Myös Kuu pyrkii kääntämään Maan ekvaattoritasoa ratatasoa kohti. Näiden ilmiöiden yhteisvaikutusta kutsutaan Kuu-Aurinkoprekessioksi (eng. lunisolar precession) ja niiden takia napa kiertyy kuvan 2.3 ympyrämäistä rataa pitkin [56, s. 22]. Yksi kierros kestää 26 000 vuotta [34, s. 174].



Kuva 2.3: *Prekessio ja nutaatio kääntävät Maan pyörimisakselin suuntaa*

Kuu-Aurinkoprekessio on suurin prekession aiheuttaja, muttei suinkaan ainoa. Planeettojen gravitaation takia myös Maan ratataso muuttuu pikkuhiljaa. Tätä kutsutaan planetaariseksi prekessioksi. [34, s. 175; 56, s. 22]

Prekession lisäksi kuvassa 2.3 näkyy pienempiä jaksollisia vaihtelua navan paikassa, nutaatiota. Nutaatio koostuu monista jaksollisista termeistä, mutta päätekijänä on Kuun ratatason prekessio: Kuun ratataso eroaa Maan ratatasosta noin 5° , joten ratataso prekesoi auringon vaikutuksesta, kuten Maakin. Näin Kuun gravitaation vaikutus Maahan vaihtelee hieman sen oman ratatason suuntauksen mukaan. Kuu-Aurinkoprekessiota laskettaessa oletetaan aina Kuun rata yhteneväksi Maan ratatason kanssa, ja tämä oletus korjataan sitten nutaatiotermillä. Nutaation pääjakso on 18.6 vuotta, ja lisäksi siihen kuuluu useita muita jaksollisia termejä. [34, s. 178; 56, s. 22]

Prekession ja nutaation vaikutusta Maan pyörimisakselin kaltevuuteen voidaan ennustaa varsin tarkasti. Monterbrakin ja Gillin kirjassa [34] on esitetty IAU76 prekessimalli ja IAU80 nutaatiomalli. Nämä mallit ovat jo hieman vanhentuneita, sillä niiden tilalle on kehitetty entistä tarkemmat IAU2000 mallit. Vanhan nutaatioprekessimallin tarkkuus, joka on joitakin millikaarisekunteja [34, s. 180], on kuitenkin riittävä tähän työhön. Lisäksi vanha malli on uutta tehokkaampi laskennallisesti. Toinen vaihtoehto olisi käyttää IAU2000B prekessio-nutaatiomallia, joka

on katkaistu versio IAU2000A-mallista. Se on täyttä mallia tehokkaampi, mutta tarkkuus rajoittuu 1 millikaarisekuntin luokkaan. [30, s. 43-52]

IAU76 prekessiomalli antaa prekessiomatriisille seuraavan kaavan:

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{R}_z(-z)\mathbf{R}_y(\vartheta)\mathbf{R}_z(-\zeta),$$

missä

$$\begin{aligned}\zeta &= 2306.''2181 T + 0.''30188 T^2 + 0.''017998 T^3 \\ \vartheta &= 2004.''3109 T - 0.''42665 T^2 - 0.''041833 T^3 \\ z &= 2306.''2181 T + 1.''09468 T^2 + 0.''018203 T^3.\end{aligned}$$

Matriisit \mathbf{R}_i ovat kaavoilla (2.6) määritellyt rotaatiomatriisit ja merkintä $''$ tarkoittaa, että parametrien ζ , ϑ ja z yksikkönä on kaarisekunti. Nämä parametrit on ensin muunnettava radiaaneiksi, jotta matriisit \mathbf{R}_i voidaan laskea. Ajasta riipuva parametri T lasketaan kaavalla

$$T = (\text{JD}(t) - 2451545)/36525.$$

Tässä $\text{JD}(t)$ on ajanhetken t *juliaaninen päivämäärä*. Se on luku, joka kertoo, montako päivää (mukaan lukien murto-osa) on kulunut ajanhetken 1. tammikuuta vuonna 4713 eaa. klo 12.00 jälkeen.

Vastaavasti IAU80 nutaatiomatriisilla on lauseke

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{R}_x(-\epsilon - \Delta\epsilon)\mathbf{R}_z(-\Delta\psi)\mathbf{R}_x(\epsilon),$$

missä

$$\Delta\psi = \sum_{i=1}^{106} (\Delta\psi)_i \sin \phi_i \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned}\Delta\epsilon &= \sum_{i=1}^{106} (\Delta\epsilon)_i \sin \phi_i \\ \epsilon &= 84381.''448 - 46.''8150 T - 0.''00059 T^2 + 0.''001813 T^3.\end{aligned} \quad (2.16)$$

Lisäksi

$$\begin{aligned}\phi_i &= p_{l,i}l + p_{l',i}l' + p_{F,i}F + p_{D,i}D + p_{\Omega,i}\Omega \\ l &= 485866.''733 + 1\,717\,915\,922.''633 T + 31.''310 T^2 + 0.''064 T^3 \\ l' &= 1287099.''804 + 129\,596\,581.''224 T - 0.''577 T^2 - 0.''012 T^3 \\ F &= 335778.''877 + 1\,739\,527\,263.''137 T - 13.''257 T^2 + 0.''011 T^3 \\ D &= 1072261.''307 + 1\,602\,961\,601.''328 T - 6.''891 T^2 + 0.''019 T^3 \\ \Omega &= 450160.''280 - 6\,962\,890.''539 T + 7.''455 T^2 + 0.''008 T^3\end{aligned}$$

Näissä parametri T lasketaan kuten prekessiollekin, ja $(\Delta\psi)_i$, $(\Delta\epsilon)_i$ sekä $p_{x,i}$ ovat vakioita, jotka löytyvät kirjasta [34].

2.3.2 Maan pyöriminen

Kolmas muunnosmatriisi, $\mathbf{G}(t)$, lisää mukaan Maan pyörimisliikkeen. Matriisin laskemiseksi tarvittavissa kaavoissa esiintyy erilaisia aikaskaaloja, joten esitellään tässä myös *GPS-aika* tarkemmin. GPS-ajan alkuhetki on 6. tammikuuta 1980 kello 00.00 *koordinoitua yleisaikaa* (eng. Coordinated Universal Time), jota myös kellomme käyvät. Kun GPS-aika ilmoitetaan, kerrotaan monesko viikko on meneillään GPS-ajan alkuhetkestä ja montako sekuntia on kulunut kyseisen viikon alusta. GPS-aika käy SI-sekunteja, eikä siihen lisätä karkaussekunteja, toisin kuin koordinoituun yleisaikaan UTC. [46, s. 72]

Maan pyörimisliikkeen muunnosmatriisia varten on laskettava *tähtiaika* eli GAST (Greenwich Apparent Sidereal Time), joka on määritelty tod-koordinaatiston x -akselin, eli senhetkisen kevätpäiväntasauspisteen, *tuntikulmaksi*. Tuntikulma on myötäpäivään Greenwichilta mitattu kulma. Tähtiajan laskemiseksi pitää kuitenkin ensin laskea *keskimääräinen tähtiaika* GMST (Greenwich Mean Sidereal Time), joka on keskimääräisen kevätpäiväntasauspisteen Υ_{mod} tuntikulma. Keskimääräinen kevätpäiväntasauspiste on se piste, missä tasauspiste olisi ilman nutaatiota. [23; 34, s. 165,181]

Keskimääräinen tähtiaika, GMST, noudattaa yhtälöä

$$\begin{aligned} \text{GMST}(t) = & 24110.54841 + 8640184.812866 T_0 + 1.002737909350795 UT1 \\ & + 0.093104 T_*^2 - 6.2 \cdot 10^{-6} T_*^3. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Tässä on kolme erilaista ajasta riippuvaa parametria, T_* , T_0 ja $UT1$, jotka eivät riipu suoraan GPS-ajasta t , vaan $UT1$ -ajasta, mitä kutsutaan myös *yleisajaksi*. Yleisaika on sidottu GMST-aikaan ja siten maapallon pyörimiseen. Se eroaa GPS-ajasta siten, että siinä vuorokausi ei ole aina 24h, eikä sekunti ole SI-sekunti, vaan kasvaa sitä mukaa, kun Maan pyöriminen hidastuu. Onneksi $UT1$ on lähellä UTC-aikaa, jota myös kellomme käyvät. UTC-aika käy SI-sekunteja, ja se pidetään kokoajan max. $\pm 0.9s$ päässä $UT1$ -ajasta lisäämällä siihen karkaussekunteja. [23; 46] GPS-ajasta saadaan laskettua UTC, kunhan tiedetään karkaussekuntit τ_k , jotka UTC-aikaan on lisätty GPS-ajan alun, 6.1.1980, jälkeen. Edelleen, UTC-ajan perusteella voidaan laskea $UT1$, mikäli tiedetään niiden erotus $UT1 - UTC = dUT1$. Niinpä GPS ajankohtaa t vastaava juliaaninen päivä $UT1$ -ajassa on

$$JD_{UT1} = JD(t) - \tau_k + dUT1.$$

Paikannuslaite tuntee karkaussekuntien määrän, sillä satelliitti lähettää ne osana navigointiviestiä [38, s. 120]. Aikaeroa $dUT1$ ei tule vielä nykyisten navigointiviestien (L1) mukana, mutta lähitulevaisuudessa otetaan käyttöön modernisoidut GPS-lähetteet (L1C, L2C ja L5), joihin $dUT1$ on sisällytetty [37; 38; 39]. Aikaero

dUT1 on osa Maan suuntausparametreja (eng. Earth Orientation Parameters), joista käytetään lyhennettä EOP.

Kun JD_{UT1} jaetaan kahtia niin, että ensimmäinen on aika kyseisen päivän UT1 0h ajankohdasta taaksepäin, ja toinen eteenpäin, saadaan parametrit $JD_{0^h UT1}$ ja UT1. Nyt täytyy vain muistaa, että juliaaninen päivä vaihtuu päivällä, 12.00, kun taas ajankohta 0h UT1 on yöllä 00.00. Lisäksi UT1 tulee ilmoittaa sekunneissa, mutta juliaaniset päivät $JD_{0^h UT1}$ ja JD_{UT1} ilmoitetaan päivissä. Juliaaninen päivä JD_{UT1} saadaan jaettua osiin seuraavasti:

$$\begin{aligned} JD_{0^h UT1} &= \lfloor JD_{UT1} + 0.5 \rfloor - 0.5 \\ UT1 &= (JD_{UT1} - JD_{0^h UT1}) \cdot 86400 \text{ s} \end{aligned}$$

Nyt voidaan laskea myös T_* ja T_0 [34, s. 167]

$$T_* = \frac{JD_{UT1} - 2451545}{36525} \quad T_0 = \frac{JD_{0^h UT1} - 2451545}{36525}.$$

Nyt on esitetty tarvittavat parametrit yhtälön (2.17) keskimääräisen tähtiajan laskemiseksi. Nutaatio muuttaa kuitenkin kevätpäiväntasauspisteen suuntaa jatkuvasti, joten oikea, näennäinen keskiaika pitää laskea yhtälön

$$GAST = GMST + \Delta\psi \cos \epsilon$$

avulla. Tätä kutsutaan myös *tasauuspisteiden tasaukseksi* (eng. equation of equinoxes). Yhtälön $\Delta\psi$ ja ϵ saadaan suoraan nutaatioteoriasta. Ne määriteltiin lausekkeissa (2.15) ja (2.16). Kun ajahetken t hetkellinen tähtiaika on GAST, niin

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{R}_z(GAST)$$

on tod-koordinaatiston ja in-koordinaatiston välinen muunnosmatriisi hetkellä t . [34, s. 181]

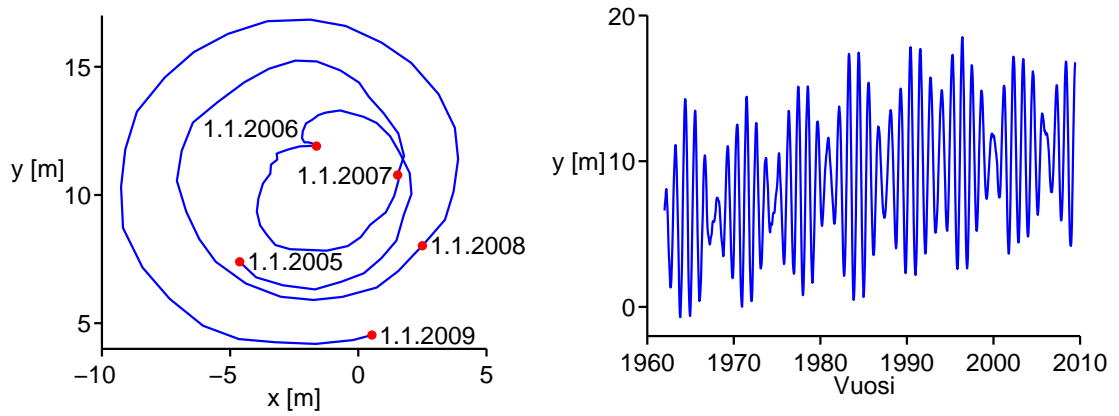
2.3.3 Napavariaatio

Napavariaatio on ilmiö, joka muuttaa Maan pyörimisnavan paikkaa Maan kuoreen nähden. Tässä pyörimisnavalla tarkoitetaan sitä pistettä Maan kuorella, josta Maan pyörimisakseli menee läpi. Napavariaatiosta kerrottiin jo Maahan sidottujen koordinaatistojen yhteydessä sivulla 10, mutta havainnollistetaan ilmiötä nyt kuvan avulla ja esitetään siihen liittyvä muunnosmatriisi \mathbf{W} .

Napavariaatiota kuvataan kahdella parametrilla, x_p ja y_p , jotka kertovat hetkellisen navan ja CIO:n välisen kulman x - ja y -suunnissa. Nämä parametrit voidaan laskea tarkasti vasta jälkikäteen, ja niiden uusimpia arvoja julkaistaan päivittäin IERS:n sivuilla [19]. Parametreille voidaan tehdä hyviä ennusteita kuukausiksi eteenpäin [9]. Pidempiaikainen ennustaminen on kuitenkin hankalaa, sillä napavariaation pääkomponenttien, Chandlerin termin ja vuotuisen termin, jakso ja amplitudi

vaihtelevat. J. Höpfner on tehnyt kattavaa tutkimusta näistä vaihteluista julkaisussaan [18] ja muitakin tutkimuksia napavariaation ennustusvirheistä on, kuten [25] ja [51]. Lisäksi ennustusta häiritsevät useat pienempiamplitudiset napavariaatiokomponentit, joiden jaksot ovat eripituisia.

Kuvassa 2.4 vasemmalla näkyy, kuinka Maan pyörimisnapa on liikkunut vuosina 2005-2008. Liike on spiraalimaista ja kuten kuvasta nähdään, on spiraali näinä vuosina laajentunut pikkuhiljaa. Tämä johtuu siitä, että napavariaation pääkomponentit Chandlerin termi ja vuotuinen termi vahvistavat toisiaan aina noin kuuden vuoden välein. Kuuden vuoden välein ne myös kumoavat toisiaan, jolloin spiraalin säde on hyvin pieni.



Kuva 2.4: Vasemmalla: *Pyörimisnavan poikkeama CIO:sta vuosina 2005-2008. Kuten kuvasta nähdään, ei (0,0)-piste eli CIO sijaitse enää spiraalin keskellä.* Oikealla: *Napavariaation y-komponentti oskilloi 1900-luvun alussa nollakeskeisenä, mutta nyttemmin se on siirtynyt positiiviseen suuntaan sekulaarisen siirtymän vuoksi.*

Napavariaation muunnosmatriisi saadaan kulmien x_p ja y_p avulla:

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{R}_y(-x_p)\mathbf{R}_x(-y_p).$$

Kulmat x_p ja y_p ovat hyvin pieniä, korkeintaan puolen kaarisekuntin luokkaa. Parametri y_p on keskimäärin hieman suurempi, sillä periodisten termien lisäksi napavariaatioon kuuluu navan hidas siirtymä 75° läntistä pituutta kohden, joka on lähellä y-akselin suuntaa. Tämän *sekulaarisen siirtymän* suuruus on noin $0.4''$ sadassa vuodessa.[18]

Napavariaatiota kuvataan aina suhteessa referenssinapaan CIO:on. CIO on määritelmänsä mukaan vuosien 1900-1905 keskimääräisen navan paikka. Niinpä 1900-luvun alussa oikea napa kiersi CIO:a. Nyt sadan vuoden jälkeen sekulaarista siirtymää on kuitenkin ehtinyt kertyä niin paljon, ettei CIO enää sijaitse edes napavariaatiospiraalin sisällä. Sekulaarinen siirtymä kohdistuu erityisesti napavariaation y -komponenttiin, mitä onkin tarkasteltu kuvassa 2.4.

Napavariaatioparametrit kuuluvat aikaeron dUT1 tavoin EOP-parametreihin. Niinpä niitäkään ei löydy vielä nykyisestä navigointiviestistä, mutta modernisoidun GPS:n läheteessä (L1C, L2C ja L5) ne ovat mukana [37; 38; 39]. Toinen tapa, jolla paikannuslaite voi saada tietoonsa nämä parametrit on AGNSS-avuste (Assisted Global Navigation Satellite System), mikä tosin edellyttää laitteelta verkkoyhteyttä avustepalvelimelle. Tämä avuste on standardoitu 3GPP TS 44.031 Radio Resource Location Services Protocol:ssa [57].

2.4 Tässä työssä käytettävistä koordinaatistoista

Kuvassa 2.5 näkyvät tässä työssä käytettävät koordinaatistot. Satelliitin alkupaikka ja -nopeus saadaan paikannuslaitteeseen ITRS-koordinaateissa, mikä on Maahan sidottu koordinaatisto (ECEF). Napavariaatiomatriisilla \mathbf{W} kertominen kiertää tätä koordinaatistoa hieman, jolloin z -akseli asettuu yhteneväksi Maan pyörimisakselin kanssa eli päästään $in(t)$ -koordinaatistoon. Muunnokset paikka- ja nopeusvektoreille ovat

$$\vec{\mathbf{r}}_{in} = \mathbf{W}^T(t)\vec{\mathbf{r}}_{ITRS} \quad (2.18)$$

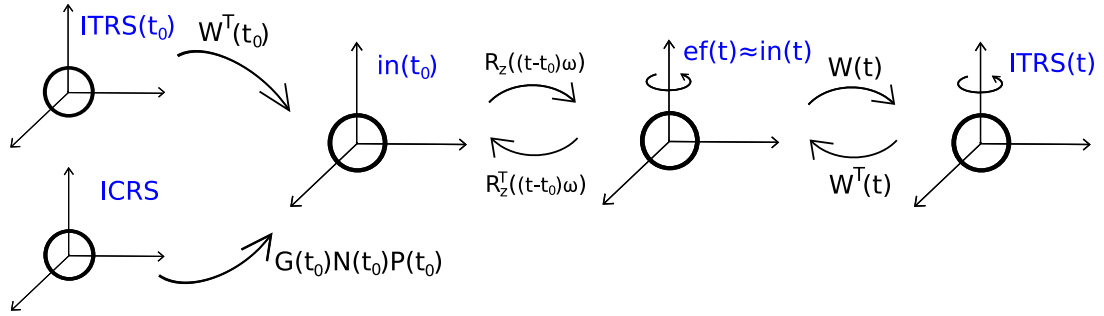
$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{v}}_{in} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{W}^T(t)\vec{\mathbf{r}}_{ITRS}) = \mathbf{W}^T(t)\vec{\mathbf{v}}_{ITRS} + \dot{\mathbf{W}}^T(t)\vec{\mathbf{r}}_{ITRS} \\ &= \mathbf{W}^T(t)\vec{\mathbf{v}}_{ITRS}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

oletten, että napavariaatio on sen verran hidas liike, että $\dot{\mathbf{W}}$ on mitätön. Jos oletetaan, että napavariaatio säilyy samana suhteellisen lyhyen ennustusjakson ajan, niin $in(t)$ -koordinaatisto poikkeaa tällöin vain vakiokierron verran ITRS:stä ja on silloin myös Maahan sidottu.

Napavariaatiota \mathbf{W} on vaikea ennustaa vuosiksi eteepäin, mutta oletamme että paikannuslaite saa tarvittavat parametrit päivitettyä joko modernisoidun GPS:n navigointiviestistä tai AGNSS-avusteena, kuten kappaleessa 2.3.3 kerrottiin. Tässä työssä käytetyt parametrien x_p ja y_p arvot on otettu IERS:n sivuilta [19]. Kuvasta 2.4 nähdään, että napavariaatio kiertää koordinaatistoa vain hyvin vähän. Maan pinnalla se vastaa noin 10 metriä. Liikettä ei kuitenkaan voida jättää huomiotta, sillä pienikin virhe alkupaikassa voi johtaa suureen ennustusvirheeseen, kuten Luvussa 5 tullaan näkemään.

Integrointiin sopiva inertiaalikoordinaatisto saadaan, kun lukitaan in -koordinaatiston akselit niihin suuntiin (avaruuteen nähden), jossa ne ovat alkuaianhetkellä t_0 . Tällöin saadaan $in(t_0)$ -koordinaatisto, johon nähden Maahan sidottu $in(t)$ -koordinaatisto liikkuu. Liike koostuu pääasiassa pyörimisestä Maan pyörimisen kulmanopeudella $\vec{\omega}$, mutta tämän lisäksi $in(t)$ -koordinaatiston z -akseli ei säilytä suuntaansa avaruuteen nähden, vaan kiertyy nutaation ja prekession vaikutuksesta. Nimetään ef-koordinaatistiksi (Earth Fixed) sellainen koordinaatisto, joka pyörii $in(t_0)$ -koordinaatistoon nähden kulmanopeudella $\vec{\omega}$, mutta jonka z -akseli ei

prekessoi tai nutatoi. Kun $t - t_0$ on pieni, vain joitakin päiviä, ovat koordinaatistot lähes yhtenevät.



Kuva 2.5: Tässä työssä käytettävät koordinaatistot ja niiden väliset muunnosmatriisit

Paikkavektorin \vec{r}_{in} muunnos inertiaalikoordinaatistoon tapahtuu seuraavasti:

$$\vec{r}_{in(t_0)} = \mathbf{R}_{in}^{in(t_0)} \vec{r}_{in} \approx \mathbf{R}_{ef}^{in(t_0)} \vec{r}_{in}. \quad (2.20)$$

Nyt, koska ef-koordinaatisto pyörii inertiaalikoordinaatistoon nähden kulmanopeudella $\vec{\omega}$, voidaan nopeutta muunnettaessa käyttää tulosta (2.13). Saadaan

$$\begin{aligned} \vec{v}_{in(t_0)} &= \mathbf{R}_{ef}^{in(t_0)} \vec{v}_{in} + \mathbf{R}_{ef}^{in(t_0)} \vec{\omega} \times \vec{r}_{in} \\ &= \mathbf{R}_{ef}^{in(t_0)} (\vec{v}_{in} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{in}). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Kuten kuvasta 2.5 näkyy, on ef ja $in(t_0)$ -koordinaatistojen välinen muunnosmatriisi muotoa $\mathbf{R}_{in(t_0)}^{ef} = \mathbf{R}_z((t-t_0)\omega)$. Niinpä hetkellä $t = t_0$ matriisi on identiteettimatriisi I , ja se voidaan jättää kaavoista (2.20) ja (2.21) pois. Tällöin muunnokset hetkellä $t = t_0$ ovat

$$\begin{aligned} \vec{r}_{in(t_0)} &= \vec{r}_{in}(t_0) \stackrel{(2.18)}{=} \mathbf{W}^T(t_0) \vec{r}_{ITRS}(t-0) \\ \vec{v}_{in(t_0)} &= \vec{v}_{in}(t_0) + \vec{\omega} \times \vec{r}_{in}(t_0) \\ &\stackrel{(2.19)}{=} \mathbf{W}^T(t_0) \vec{v}_{ITRS}(t_0) + \vec{\omega} \times (\mathbf{W}^T(t_0) \vec{r}_{ITRS}(t_0)). \end{aligned}$$

Satelliitin rataa integroitaessa tarvitaan tietoa Kuun ja Auringon sijainneista. Kuun ja Auringon paikat lasketaan tavallisesti ICRS-koordinaateissa, mistä ne saadaan tuotua $in(t_0)$ -koordinaatistoon muunnoksella

$$\vec{r}_{in(t_0)} = \mathbf{R}_{ICRS}^{in(t_0)} \vec{r}_{ICRS} = \mathbf{G}(t_0) \mathbf{N}(t_0) \mathbf{P}(t_0) \vec{r}_{ICRS}.$$

Matriisi $\mathbf{G}(t_0) \mathbf{N}(t_0) \mathbf{P}(t_0)$ on vakio, eli se on laskettava ainoastaan yhden kerran ennustuksen aikana.

Maan gravitaatiokiihtyvyyden laskemiseksi tarvitaan taas Maahan, tai tarkemmin ottaen Maan kuoreen, sidottuja ITRS-koordinaatteja. Siispä on siirryttävä $in(t_0)$ -

koordinaateista ITRS(t)-koordinaatteihin. Tässä luvussa määriteltyjen muunnosmatriisien avulla se tapahtuu seuraavasti:

$$\vec{\mathbf{r}}_{\text{ITRS}}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{G}(t)\mathbf{N}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{P}^T(t_0)\mathbf{N}^T(t_0)\mathbf{G}^T(t_0)\vec{\mathbf{r}}_{\text{in}(t_0)} \quad (2.22)$$

Jos ennustusjakso on kuitenkin vain joidenkin päivien pituinen, voidaan olettaa, etteivät nutaatio- ja prekessiomatriisit muutu tänä aikana. Tällöin $\mathbf{P}(t)\mathbf{P}^T(t_0) = \mathbf{N}(t)\mathbf{N}^T(t_0) = \mathbf{I}$ ja yhtälö 2.22 yksinkertaistuu muotoon

$$\vec{\mathbf{r}}_{\text{ITRS}}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{G}(t)\mathbf{G}^T(t_0)\vec{\mathbf{r}}_{\text{in}(t_0)}.$$

Matriisi \mathbf{G} on se matriisi, jolla kertominen pyörittää koordinaatistoa Maan pyörimisliikkeen mukana. Lisäksi muunnosmatriisi \mathbf{G} huomioi nutaatiosta aiheutuvat korjaukset. Nyt nutaation muutos todettiin jo edellistä approksimaatiota tehdessä mitättömäksi, joten muunnoksen $\mathbf{G}(t)\mathbf{G}^T(t_0)$ voidaan olettaa olevan puhtaasti koordinaatiston pyörittämistä z -akselin ympäri Maan pyörimisen kulmanopeudella. Jos alkuhetkellä t_0 in-koordinaatiston x -akseli osoittaa Maan nollameridiaanille, niin hetkellä t nollameridiaani löytyy suunnasta, joka saadaan pyörittämällä x -akselia z -akselin ympäri kulman $\alpha = (t - t_0)\omega$ verran, missä ω on Maan pyörimisen keskimääräinen kulmanopeus. Näin muunnosmatriisi saadaan kirjoitettua yksinkertaisena rotaationa:

$$\mathbf{G}(t)\mathbf{G}^T(t_0) \approx \mathbf{R}_z((t - t_0)\omega).$$

Nimetään ef-koordinaatistoksi sellainen koordinaatisto, että yllä oleva matriisi on sen ja in(t_0)-koordinaatiston välinen muunnosmatriisi, toisin sanoen

$$\vec{\mathbf{r}}_{\text{ef}}(t) = \mathbf{R}_{\text{in}(t_0)}^{\text{ef}}(t) \vec{\mathbf{r}}_{\text{in}(t_0)} = \mathbf{R}_z((t - t_0)\omega) \vec{\mathbf{r}}_{\text{in}(t_0)}.$$

Tätä käyttäen yhtälö (2.22) saa lopulta muodon

$$\vec{\mathbf{r}}_{\text{ITRS}}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{R}_{\text{in}(t_0)}^{\text{ef}}(t) \vec{\mathbf{r}}_{\text{in}(t_0)}, \quad (2.23)$$

ja muunnos toiseen suuntaan voidaan jälleen laskea transponoimalla muunnosmatriisi. Gravitaatiokiihtyvyyttä on mahdollista laskea myös ef-koordinaateissa, jolloin muunnos on hieman yksinkertaisempi, mutta oikeampi tapa olisi käyttää ITRS-koordinaatistoa. Ef-koordinaatiston käytöstä syntyvä virhe on kuitenkin pieni, sillä napavariaatiomatriisi kiertää koordinaatistoa niin vähän, että se Maan pinnalla vastaa noin 10 metriä. Maan pinnalla olevissa pisteissä, jotka ovat vain 10 metrin päässä toisistaan, gravitaatiokiihtyvyyden suuruus ja suunta on lähes sama.

Lopuksi, kun satelliitin paikan ennuste on valmis, pitää tulos vielä siirtää sen hetken ITRS-koordinaatteihin, jotta sitä voitaisiin verrata satelliitin todelliseen paikkaan. Paikkamuunnos tapahtuu tällöin kaavaa (2.23) noudattaen. Nopeutta muunnettaessa on taas otettava huomioon Maan pyöriminen. Lasketaan vektorin $\vec{\mathbf{r}}_{\text{ITRS}}$ aikaderivaatta

$$\frac{d\vec{\mathbf{r}}_{\text{ITRS}}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{W}\mathbf{R}_{\text{in}(t_0)}^{\text{ef}}(t) \vec{\mathbf{r}}_{\text{in}(t_0)}) = \mathbf{W} \frac{d\vec{\mathbf{r}}_{\text{ef}}}{dt}. \quad (2.24)$$

Tässä oletettiin, että t ja t_0 ovat sen verran lähellä toisiaan, että matriisia \mathbf{W} voidaan käsitellä vakiona. Kun nopeutta muunnetaan pyörivästä ef-koordinaatistosta inertiaalikoordinaatistoon, voidaan käyttää kaavaa (2.14). Siis

$$\vec{\mathbf{v}}_{\text{ef}} = \mathbf{R}_{\text{in}(t_0)}^{\text{ef}}(t) \vec{\mathbf{v}}_{\text{in}(t_0)} - \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}_{\text{ef}}.$$

Yhdistämällä tämä yhtälön (2.24) kanssa saadaan nopeuden muunnokseksi

$$\vec{\mathbf{v}}_{\text{ITRS}}(t) = \mathbf{W} \left(\mathbf{R}_{\text{in}(t_0)}^{\text{ef}}(t) \vec{\mathbf{v}}_{\text{in}(t_0)} - \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}_{\text{ef}} \right).$$

Luku 3

Satelliitin liikeyhtälö

Kun GPS-satelliitti kiertää Maata radallaan, on tilanne hyvin samanlainen kuin planeettojen kiertäessä Aurinkoa: Kahden kappaleen välillä vaikuttaa gravitaatiovuorovaikutus ja toinen kappaleista on hyvin suuri toiseen verrattuna. Tämä niin sanottu kahden kappaleen ongelma on osattu ratkaista jo pitkään. Ensimmäinen, joka muotoili havaintoihin perustuvat säännöt planeettojen rataliikkeelle oli Johannes Kepler (1571-1630) [28, s. 105]. Myöhemmin Isaac Newton (1643-1727) onnistui päättämään kuuluisat liikelakinsa, sekä gravitaatiolain, joista Keplerin säännöt voitiin johtaa.

Jos koordinaattivektori $\vec{\mathbf{r}}$ on satelliitin paikkavektori jossakin maakeskeisessä inertiaalikoordinaatistossa, niin Newtonin gravitaatiolain mukaan satelliittiin vaikuttaa gravitaatiokiihtyvyys

$$\ddot{\vec{\mathbf{r}}} = -\frac{GM_E}{\|\vec{\mathbf{r}}\|^3}\vec{\mathbf{r}}, \quad (3.1)$$

missä G on gravitaatiovakio ja M_E maapallon massa. Tämä hyvin yksinkertainen malli antaa kuvan satelliitin liikkeen pääpiirteistä. Tarkempaa paikkaa laskettaessa tulee kuitenkin ottaa huomioon Maan massan epätasainen jakautuminen, satelliitin vuorovaikutus Kuun ja Auringon kanssa, sekä useita hieman pienempiä voimia, jotka pyrkivät muuttamaan satelliitin rataa. Niinpä todellinen liikeyhtälö on muotoa

$$\ddot{\vec{\mathbf{r}}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}(t, \vec{\mathbf{r}})}{m} = -\frac{GM_E}{\|\vec{\mathbf{r}}\|^3}\vec{\mathbf{r}} + \vec{\mathbf{P}}(t, \vec{\mathbf{r}}), \quad (3.2)$$

missä funktio $\vec{\mathbf{P}}$ kuvaa perturbaatio- eli häiriökiihtyvyyttä ja $\vec{\mathbf{F}}$ on satelliittiin vaikuttavien voimien summa.

Satelliittien liikkeeseen vaikuttavia voimia on tutkittu paljon, ja tarkimmat mallit huomioivat suuren määrän eri ilmiöitä. Tämän luvun tarkoituksena on selvittää, mitkä ilmiöt ovat keskeisessä roolissa, kun kyseessä on GPS-satelliitin liikeyhtälö, ja mitkä ilmiöt voitaisiin jättää huomiotta, kun haetaan laskennallisesti kevyempää mallia. Vaikka tässä luvussa muodostetaan liikeyhtälö nimenomaan GPS-satelliiteille, toimii se todennäköisesti hyvin myös muille samalla korkeudella

oleville satelliiteille. Niinpä sitä voitaneen soveltaa Venäläiselle satelliittipaikannusjärjestelmä GLONASSille sekä eurooppalaiselle Galileolle, joissa satelliittien etäisyys Maasta on samaa suuruusluokkaa kuin GPS:lläkin. Lähempänä tai kauempana Maata kiertäville satelliiteille liikeyhtälö sen sijaan ei toimi, vaan sitä pitäisi muokata niille sopivammaksi.

3.1 Geopotentialiaali

Yhtälö (3.1) kuvaa satelliittiin vaikuttavaa Maan gravitaatiokiihtyvyyttä sillä oletuksella, että Maan massa on pistemäinen tai pallosymmetrisesti jakautunut. Todellisuudessa näin ei ole, ja suurin yksittäinen häiriökiihtyvyyden \vec{P} osatekijä johtuukin Maan massan epätasaisesta jakautumisesta.

Olkoon $\rho(\vec{r}^*)$ Maan massan tiheyttä kuvaava funktio, \vec{a}_g Maan gravitaatiokiihtyvyys ja olkoon satelliitin paikkavektori maakeskeisessä inertiaalikoordinaatistossa jälleen \vec{r} . Tällöin yhtälön (3.1) tarkka versio on

$$\vec{a}_g(\vec{r}) = -G \int \frac{\rho(\vec{r}^*)(\vec{r} - \vec{r}^*)}{\|\vec{r} - \vec{r}^*\|^3} d\vec{r}^*. \quad (3.3)$$

Koska $\nabla(1/\|\vec{r} - \vec{r}^*\|) = -(\vec{r} - \vec{r}^*)/\|\vec{r} - \vec{r}^*\|^3$, voidaan sama yhtälö kirjoittaa myös muotoon

$$\vec{a}_g(\vec{r}) = \nabla G \int \frac{\rho(\vec{r}^*)}{\|\vec{r} - \vec{r}^*\|} d\vec{r}^*. \quad (3.4)$$

Määritellään sitten skalaariarvoinen funktio

$$U(\vec{r}) = G \int \frac{\rho(\vec{r}^*)}{\|\vec{r} - \vec{r}^*\|} d\vec{r}^*. \quad (3.5)$$

ja kutsutaan tätä Maan gravitaatiokentän potentiaaliksi. Gravitaatiokiihtyvyyttä kuvaava vektorikenttä \vec{a}_g saadaan suoraan sen gradienttina: $\vec{a}_g(\vec{r}) = \nabla U(\vec{r})$. [34, s. 56; 56, s. 144]

Edellä olevissa yhtälöissä (3.3) ja (3.4) koordinaattivektorien ja -pisteiden on oltava inertiaalikoordinaatistossa, jotta yhtälöt pätsivät. Samoin potentiaali U määriteltiin inertiaalikoordinaatistoon. Geodesiassa eli maanmittausopissa on kuitenkin tyypillistä siirtyä käsittelemään potentiaalia Maan mukana pyörivissä koordinaateissa. Tässä on se etu, että Maahan sidotuissa koordinaateissa Maan tiheyttä kuvaava funktio $\rho(\vec{r}^*)$, ja siten myös U , ovat stationäärisiä eli ajasta riippumattomia. Sen sijaan edellä oleviin yhtälöihin olisi oikeastaan pitänyt kirjoittaa $\rho(\vec{r}^*, t)$, sillä inertiaalikoordinaatisto ja Maa pyörivät toisiinsa nähden.

Gradientin koordinaatistoriippumattomuuden (2.8) takia inertiaalikoordinaatiston gravitaatiokiihtyvyys on helppo laskea Maahan sidotun koordinaatiston potentiaalin

avulla. Jos merkitään inertiaalikoordinaatistoa kirjaimella I ja Maahan sidottua koordinaatistoa kirjaimella E, niin

$$\vec{a}_{g,I}(\vec{r}_I, t) = \nabla_I U_I(\vec{r}_I, t) \stackrel{(2.8)}{=} \mathbf{R}_E^I(t) \nabla_E U_E(\vec{r}_E) = \mathbf{R}_E^I(t) \vec{a}_{g,E}(\vec{r}_E),$$

ja paikkavektori \vec{r}_E saadaan laskettua yhtälöstä

$$\vec{r}_E = \mathbf{R}_I^E \vec{r}_I.$$

Tässä työssä käytetään inertiaalikoordinaatistona $\text{in}(t_0)$ -koordinaatistoa, jonka akselit osoittavat niihin suuntiin, missä Maan mukana pyörivän in-koordinaatiston akselit ovat hetkellä t_0 . Maahan sidottuna koordinaatistona E pitäisi tarkalleen ottaen olla ITRS, mutta myös ef-koordinaatisto käy, sillä se eroaa vain hyvin vähän ITRS:stä, mikä todettiin kappaleessa 2.4.

Legendren polynomit

Potentiaalia U ei voida laskea suoraan kaavan (3.5) avulla, sillä funktion ρ arvoja ei voida mitata erikseen jokaisessa pisteessä Maan kuorella ja sisällä. Niinpä kaava on muokattava toiseen muotoon, eräänlaiseksi spektriesitykseksi.

Spektriesitystä varten tarvitaan *Legendren polynomeja*, jotka ovat hyvin tunnettu ortogonaalisten polynomien joukko. Määritellään Legendren polynomit $P_n(x)$ generoivan funktiona, $(1 - 2xt + t^2)^{-1/2}$, Taylorin sarjakehitelmän kertoimiksi:

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n, \quad |t| < 1 \quad (3.6)$$

Sarjakehitelmä suppenee, kun $|t| < 1$. [2, s. 740] Sijoittamalla $t = h/r$ ja $x = \sin \theta$ saadaan kaava (3.6) muotoon

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - 2(h/r) \sin \theta + (h/r)^2)}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\sin \theta) \left(\frac{h}{r}\right)^n, \quad \text{kun } |h| < r.$$

Jos r ja θ tulkitaan pallokoordinaatiston

$$\begin{cases} x &= r \cos \theta \cos \phi \\ y &= r \cos \theta \sin \phi \\ z &= r \sin \theta \end{cases} \quad (3.7)$$

koordinaateiksi, niin edelleen

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - h)^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rh \sin \theta + h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{r^{n+1}} P_n(\sin \theta). \quad (3.8)$$

Toisaalta funktion $f(x, y, z) = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ Taylorin sarjakehitelmä pisteessä $(x, y, z - h)$ on [2, s. 336]

$$f(x, y, z - h) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - h)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-h)^n}{n!} \frac{\partial^n f(x, y, z)}{\partial z^n}.$$

Vertaamalla tätä kaavaan (3.8), saadaan ratkaistua Legendren polynomeille esitys

$$P_n(\sin \theta) = r^{n+1} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n f(x, y, z)}{\partial z^n} = r^{n+1} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left(\frac{1}{r} \right),$$

joka on yhtäpitävä määritelmän (3.6) kanssa.

Potentiaalin spektriesitys

Potentiaalin spektriesitys saadaan, kun laajennetaan lausekkeen (3.5) tekijä $1/\|\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2\|$ sarjakehitelmäksi. Kosinilauseen ja määritelmän (3.6) perusteella [2, s. 744]

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2\|} &= \frac{1}{\sqrt{r_1^2 - 2r_1r_2 \cos \gamma + r_2^2}} = \frac{1}{r_1} \left[1 - 2\frac{r_2}{r_1} \cos \gamma + \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \right]^{-1/2} \\ &\stackrel{(3.6)}{=} \frac{1}{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^n P_n(\cos \gamma), \quad \text{missä} \quad \cos \gamma = \frac{\vec{\mathbf{r}}_1 \cdot \vec{\mathbf{r}}_2}{r_1 r_2}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Kuten aiemmin oli puhetta, ovat paikkavektorit $\vec{\mathbf{r}}_1$ ja $\vec{\mathbf{r}}_2$ nyt Maahan sidotuissa koordinaateissa, joten vektoreiden komponentit x , y ja z voidaan esittää pituuspiirin, λ , leveyspiirin φ , sekä etäisyyden r funktiona

$$\begin{cases} x &= r \cos \varphi \cos \lambda \\ y &= r \cos \varphi \sin \lambda \\ z &= r \sin \varphi \end{cases} \quad (3.10)$$

noudattaen pallokoordinaatistoesitystä (3.7). Merkitään alaindeksillä 1 satelliitin paikkaa kuvaavia koordinaatteja ja alaindeksillä 2 niitä, jotka kuvaavat jotakin Maan pistettä. Voidaan osoittaa [2, s. 796-799], että näillä koordinaateilla sekä vektoreiden $\vec{\mathbf{r}}_1$ ja $\vec{\mathbf{r}}_2$ välisellä kulmalla γ on yhteys

$$P_n(\cos \gamma) = \sum_{m=0}^n (2 - \delta_{0m}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\sin \varphi_1) P_{nm}(\sin \varphi_2) \cos(m(\lambda_1 - \lambda_2)). \quad (3.11)$$

Tässä P_{nm} on *Legendren liittopolynomi* (associated Legendre polynomial), joka määritellään

$$P_{nm}(u) = (1 - u^2)^{m/2} \frac{d^m}{du^m} P_n(u), \quad (3.12)$$

ja δ_{nm} on Kroneckerin delta. Yhtälöiden (3.9) ja (3.11) avulla potentiaalin $U(\vec{r}_1)$ lausekkeessa (3.5) oleva integraali saadaan kirjoitettua muotoon

$$U = \frac{G}{r_1} \int \rho(\vec{r}_2) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^n (2 - \delta_{0m}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\sin \varphi_1) \cdot P_{nm}(\sin \varphi_2) \cos(m(\lambda_1 - \lambda_2)) d\vec{r}_2.$$

Edelleen, vaihtamalla integroinnin ja summauksen järjestystä, sekä käyttämällä summakaavaa $\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$ päästään muotoon [34, s. 57]

$$U(\vec{r}_1) = \frac{GM_E}{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_E}{r_1} \right)^n P_{nm}(\sin \varphi_1) (C_{nm} \cos(m\lambda_1) + S_{nm} \sin(m\lambda_1)), \quad (3.13)$$

missä ainoastaan kertoimet C_{nm} ja S_{nm} riippuvat Maan pisteestä $(r_2, \lambda_2, \varphi_2)$:

$$C_{nm} = \frac{2 - \delta_{0m}}{M_E} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int \left(\frac{r_2}{R_E} \right)^n P_{nm}(\sin \varphi_2) \cos(m\lambda_2) \rho(\vec{r}_2) d\vec{r}_2$$

$$S_{nm} = \frac{2 - \delta_{0m}}{M_E} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int \left(\frac{r_2}{R_E} \right)^n P_{nm}(\sin \varphi_2) \sin(m\lambda_2) \rho(\vec{r}_2) d\vec{r}_2.$$

Nämä ovat vakioita ja siksi lausekkeen (3.13) potentiaali onkin vain satelliitin paikan funktio.

Summalausekkeen (3.13) ensimmäinen termi, missä $m = n = 0$, on pistemassan gravitaatiota, eli yhtälön (3.2) ensimmäistä termiä, vastaava potentiaali. Loput termit kuuluvat häiriöosaan \vec{P} .

Vakiot C_{nm} ja S_{nm} kuvaavat Maan massan jakautumista ja ne voidaan selvittää kokeellisesti. Nykyisistä gravitaatiomalleista löytyy näitä kertoimia jopa yli 1000. asteeseen ja kertalukuun saakka, mutta kertoimet pienenevät nopeasti asteen n kasvaessa. Useimpiin tarkoituksiin riittää, kun huomioidaan sellaiset kertoimet, joiden asteluku on 8 tai pienempi. Tällöin jäljelle jäävien kertoimien vaikutus satelliitin paikkaan on jo hyvin pieni, noin 0.2 m viiden päivän jaksolle [50].

Nyt kun haetaan laskennallisesti tehokasta algoritmia, on tämä 0.2 m viidessä päivässä tarpeettoman hyvä tarkkuus, sillä esimerkiksi Auringon säteilypaineesta aiheutuvaa kiihtyvyyttä ei saada mallinnettua läheskään näin tarkasti. Niinpä huomioitavien termien astetta kannattaa vähentää kahdeksasta. Myös M. Poutanen kirjoittaa [46], että GPS-satelliittien korkeudessa riittäisi ottaa huomioon kertoimet vain 4. asteeseen saakka. Tarkastellaan sopivaa kertoimien määrää vielä luvussa 5.

Koska geopotentialikertoimien suuruusluokan vaihteluväli on niin suuri, ilmoitetaan kertoimet yleensä skaalattuna seuraavalla neliöjuuritermillä:

$$\begin{bmatrix} \overline{C}_{nm} \\ \overline{S}_{nm} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{(2-\delta_{nm})(2n+1)(n-m)!}} \begin{bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{bmatrix}$$

Näitä normalisoituja geopotentialikertoimia on saatavilla lähteestä [44].

Gravitaatiokiihtyvyyden laskemisesta

Gravitaatiokiihtyvyys $\vec{a}_g(\vec{r})$ saadaan, kun lasketaan geopotentialin gradientti $\nabla U(\vec{r})$. Osittaisderivaattoja ei kuitenkaan ole tapana laskea suoraan kaavasta (3.13), vaan summan termit ratkaistaan rekursiivisesti. Erilaisten rekursioalgoritmien vertailua löytyy artikkelista [8] ja tässä kerromme tarkemmin yhdestä niistä. Algoritmin kehitti L. E. Cunningham vuonna 1970 [10] ja myöhemmin Métris yleisti sen korkeamman asteen derivaatoille [35].

Määritellään *palloharmoniset termit*

$$Y_{nm} = \frac{P_{nm}(\sin \varphi) e^{im\lambda}}{r^{n+1}}. \quad (3.14)$$

Merkitsemällä palloharmonisen termin reaali-osaa V_{nm} ja imaginaariosaa W_{nm} , saadaan sarjakehitelmälle (3.13) lauseke

$$\begin{aligned} U(\vec{r}_1) &= GM_E \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n R_E^n (C_{nm} V_{nm} + S_{nm} W_{nm}) \\ &= \operatorname{Re} \left[GM_E \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n R_E^n (C_{nm} - i S_{nm}) Y_{nm} \right]. \end{aligned}$$

Tässä Re merkitsee reaali-osaa. Lausekkeen termit Y_{nm} voidaan laskea rekursiivisesti, jonka jälkeen niiden osittaisderivaatat $\partial Y_{nm}/\partial x$, $\partial Y_{nm}/\partial y$ ja $\partial Y_{nm}/\partial z$ voidaan esittää eri Y_{nm} -termien lineaarikombinaationa. Tämä säästää laskenta-aikaa silloin, kun tarvitaan usean palloharmonisen termin derivaattoja.

Termien Y_{nm} rekursiokaavat seuraavat suoraan Legendren liittofunktioiden rekursioista. Esimmäisen rekursiokaava on

$$P_{mm}(u) = (2m-1)(1-u^2)^{1/2} P_{m-1,m-1}(u). \quad (3.15)$$

Eulerin kaavan ja koordinaattiyhtälöiden (3.10) perusteella

$$e^{im\lambda} = (\cos \lambda + i \sin \lambda)^m = \left(\frac{x}{r \cos \varphi} + i \frac{y}{r \cos \varphi} \right)^m = \frac{(x + iy)^m}{r^m \cos^m \varphi},$$

joten palloharmonisille termeille

$$\begin{aligned} Y_{mm} &\stackrel{(3.15)}{=} (2m-1)(1-\sin^2 \varphi)^{1/2} \frac{e^{im\lambda}}{r^{m+1}} P_{m-1,m-1}(\sin \varphi) \\ &= (2m-1)(1-\sin^2 \varphi)^{1/2} \frac{x + iy}{r^2 \cos \varphi} \frac{e^{i(m-1)\lambda}}{r^m} P_{m-1,m-1}(\sin \varphi), \end{aligned}$$

mistä seuraa rekursiokaava

$$Y_{mm} = \frac{(2m-1)(x+iy)}{r^2} Y_{m-1,m-1}. \quad (3.16)$$

Tällä saadaan laskettua ne termit, joille $n = m$, kun lähdetään liikkeelle arvosta $Y_{00} = 1/r$. Loput Y_{nm} lasketaan toisen rekursiokaavan avulla

$$Y_{nm} = \frac{2n-1}{n-m} \frac{z}{r^2} Y_{n-1,m} - \frac{n+m-1}{n-m} \frac{1}{r^2} Y_{n-2,m}, \quad (3.17)$$

mikä on johdettavissa Legendren liittofunktion rekursiosta

$$P_{nm}(\sin \varphi) = \frac{2n-1}{n-m} \sin \varphi P_{n-1,m}(\sin \varphi) - \frac{n+m-1}{n-m} P_{n-2,m}(\sin \varphi).$$

Rekursio (3.17) pätee myös kun $n = m+1$, jos $Y_{n-2,m}$ asetetaan nolliksi.

Kun palloharmoniset termit on saatu laskettua yhtälöiden (3.16) ja (3.17) avulla, päästään laskemaan niiden osittaisderivaattoja. Derivaattakaavojen johtaminen tehdään artikkelin [10] tavalla ja liikkeelle lähdetään tarkastelemalla Legendren liittofunktioiden P_{nm} ominaisuutta:

$$\frac{P_{nm}(\sin \varphi) e^{im\lambda}}{r^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{(n-m)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{n-m} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (3.18)$$

Yhtälön (3.18) vasen puoli on suoraan Y_{nm} :n määritelmä. Operoidaan siihen derivaattaoperaattorilla $(\partial/\partial x + i\partial/\partial y)$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) Y_{nm} &= \frac{(-1)^n}{(n-m)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^{m+1} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{n-m} \left(\frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{((n+1)-(m+1))!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^{m+1} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{(n+1)-(m+1)} \left(\frac{1}{r} \right) \\ &= -Y_{n+1,m+1}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Tehdään sitten sama toisella operaattorilla $(\partial/\partial x - i\partial/\partial y)$. Koska harmonisille funktioille $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 = -\partial^2/\partial z^2$, saadaan

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) Y_{nm} &= \frac{(-1)^n}{(n-m)!} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^{m-1} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{n-m} \left(\frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{(n-m)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^{m-1} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^{(n+1)-(m-1)} \left(\frac{1}{r} \right) \\ &= (n-m+2)(n-m+1) Y_{n+1,m-1}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

olettaen, että $m > 0$. Jos $m = 0$, ei kaava päde, mistä syystä saadaan derivaattojen lausekkeisiin erikoistapaukset (3.21).

Käyttämällä yhtälöitä

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{i}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{i}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

sekä äsken saatuja tuloksia (3.19) ja (3.20), voidaan palloharmonisten termien osittaisderivaatoille x :n ja y :n suhteen kirjoittaa lausekkeet

$$\begin{aligned}\frac{\partial Y_{nm}}{\partial x} &= \frac{1}{2}(n-m+2)(n-m+1) Y_{n+1,m-1} - \frac{1}{2} Y_{n+1,m+1} \\ \frac{\partial Y_{nm}}{\partial y} &= \frac{i}{2}(n-m+2)(n-m+1) Y_{n+1,m-1} + \frac{i}{2} Y_{n+1,m+1}\end{aligned}$$

Erikoistapauksessa $m = 0$ derivaatat ovat

$$\frac{\partial Y_{n0}}{\partial x} = \mathcal{R}e(-Y_{n+1,1}) \quad \text{ja} \quad \frac{\partial Y_{n0}}{\partial y} = \mathcal{I}m(-Y_{n+1,1}). \quad (3.21)$$

Lopuksi lasketaan vielä derivaatta z :n suhteen. Se saadaan suoraan derivoimalla yhtälön (3.18) oikeaa puolta. Tuloksena on

$$\frac{\partial Y_{nm}}{\partial z} = (-1)(n-m+1)Y_{n+1,m}.$$

Tässä luvussa esiintyvien rekursioiden käytön kanssa on oltava varovainen, jos laskettavien termien kertaluku on hyvin suuri, vaikkapa luokkaa 10^3 . Mahdollisista numeerisista ongelmista on kerrottu artikkelissa [17]. Jos taas kertaluku on riittävän pieni, on rekursio stabiili, eli aiempaa termiä laskiessa syntynyt pyöristysvirhe ei tuota myöhempiin termeihin merkittävää virhettä. Jos kertaluku on 15, voidaan olettaa, että merkitseviä numeroita menetetään 2-3 kpl [50, s. 67]. Tällöin 2-3 viimeistä desimaalia voivat olla pyöristysvirhettä. Tässä työssä rekursioiden käyttö on turvallista, sillä palloharmonisia termejä tarvitaan korkeimmillaan 8. kertalukuun asti.

3.2 Kuu ja Aurinko

Toiseksi suurimmat häiriökiihtyvyydet aiheutuvat, kun Kuu ja Aurinko vetävät satelliittia puoleensa. Samalla ne toki vetävät myös Maata puoleensa, joten on tarkasteltava, kuinka suuri kiihtyvyys satelliittiin aiheutuu suhteessa Maan kiihtyvyyteen. Valitaan jokin inertiaalikoordinaatisto, ja merkitään sen paikkavektoreita kirjaimella \vec{p} . Merkitään maakeskeisen koordinaatiston paikkavektoreita puolestaan kirjaimella \vec{r} . Jos Maa ja Kuu oletetaan pistemassoiksi tai pallosym-

metrisiksi, niin niiden yhteisvaikutuksesta satelliittiin kohdistuu gravitaatiokiihtyvyys

$$\ddot{\mathbf{p}}_{\text{sat}} = -\frac{GM_E}{\|\mathbf{r}_{\text{sat}}\|^3}\mathbf{r}_{\text{sat}} + \frac{GM}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{sat}}\|^3}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{sat}}),$$

missä \mathbf{r} on Kuun ja \mathbf{r}_{sat} satelliitin paikkavektori maakeskeisessä koordinaatistossa, ja M on Kuun massa. Myös Maahan vaikuttaa Kuun gravitaatiokiihtyvyys

$$\ddot{\mathbf{p}}_{\text{maa}} = \frac{GM}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r},$$

joten satelliittin kiihtyvyys Maan suhteen on

$$\ddot{\mathbf{p}}_{\text{sat}} - \ddot{\mathbf{p}}_{\text{maa}} = \ddot{\mathbf{r}}_{\text{sat}} = -\frac{GM_E}{\|\mathbf{r}_{\text{sat}}\|^3}\mathbf{r}_{\text{sat}} + GM \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{sat}}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{sat}}\|^3} - \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} \right).$$

Tässä ensimmäinen termi on Maan gravitaatiosta aiheutuva kiihtyvyys ja jälkimmäinen osa on haettu häiriötermi (katso yhtälö (3.2)). Merkitään Kuun aiheuttamaa häiriökiihtyvyyttä $\vec{\mathbf{a}}_{\text{kuu}}$. Sille saadaan lauseke

$$\vec{\mathbf{a}}_{\text{kuu}} = GM \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{sat}}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{sat}}\|^3} - \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} \right). \quad (3.22)$$

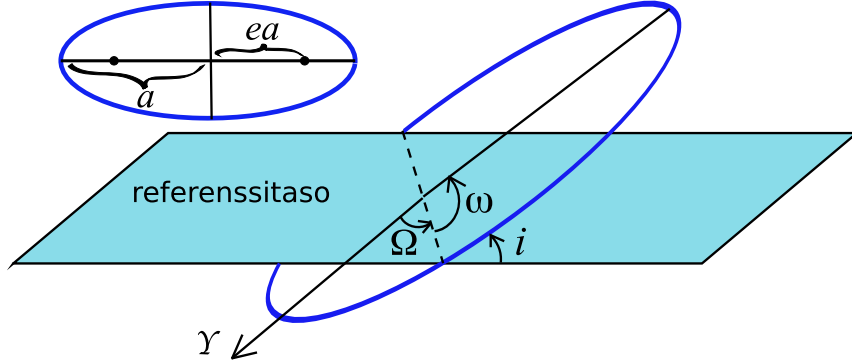
Auringon vastaava kaava saadaan korvaamalla Kuun paikkavektori \mathbf{r} Auringon paikkavektorilla ja M Auringon massalla. Myös planeetoista aiheutuvat kiihtyvyydet voidaan laskea tällä kaavalla, mutta ne jätetään huomiotta niiden pienuuden vuoksi. [52, s. 99]

Lähteen [46, s. 153] mukaan Kuun gravitaatio vaikuttaa satelliitin paikkaan noin 3 000 m vuorokaudessa ja Auringon gravitaatio noin 800 m vuorokaudessa. Luvussa 5 saadaan myös samaa suuruusluokkaa olevia arvoja, kun kokeillaan, paljonko ennustusvirhe muuttuu, jos jätetään Auringon ja Kuun gravitaatio huomioimatta.

Kuun ja Auringon paikkavektoreiden laskemiseen käytetään VSOP87-mallia (Variations Séculaires des Orbites Planétaires) [7]. Se on 80-luvulla kehitetty teoria planeettojen ratojen laskemiseen. Planeetat kiertävät Aurinkokunnan massakeskipisteen ympäri ellipsin muotoisilla radoilla, mutta myös näiden ellipsien muoto ja suunta avaruudessa muuttuu pikkuhiljaa erilaisten voimien vaikutuksesta, kuten satelliittienkin rataellipsit. Liike tosin ilmenee vain hyvin pitkää aikaa tarkastellessa, mistä tulee sana *sekulaari* (eng. secular).

Taivaankappaleiden rataellipsejä voidaan kuvata tässäkin työssä jo moneen kertaan mainituilla Keplerin rataparametreilla, jotka säilyisivät vakioina ilman rataa häiriöiviä voimia. Poiketaan hieman kappaleen varsinaisesta aiheesta ja esitellään nämä parametrit lyhyesti. Parametreja on kuusi kappaletta ja niitä on havainnollistettu kuvassa 3.1. Ensimmäiset kaksi, isoakselin puolikas a ja eksentrisyys e kuvaavat ellipsin kokoa ja soikeutta. Seuraavat kolme parametria ovat kulmia, jotka kertovat ellipsin suunnan avaruudessa, johonkin referenssitason ja -suuntaan nähden. Referenssitasona voi olla esimerkiksi Maan ekvaattoritaso ja referenssisuuntana päivän-

tasaupiste. Kulmista ensimmäinen, inkliinaatio i kertoo ellipsin tason kaltevuuden referenssitason nähden. Nousevan solmun pituus Ω kertoo ellipsin ja referenssitason leikkaussuoran suunnan ja perihelin argumentti ω kertoo leikkaustason ja isoakselin puolikkaan välisen kulman, eli mihin suuntaan avaruudessa ellipsi on litistynyt. Kuudes parametreista on keskianomalia M_0 , mitä ei ole merkitty kuvaan, sillä se ei ole geometrinen suure. Se kertoo, missä kohden ellipsirataa kappale on menossa.



Kuva 3.1: Keplerin rataparametrit a, e, i, Ω ja ω . Kirjaimella Υ on merkitty sitä puolisuoraa, joka kertoo referenssisuunnan referenssitasolla.

VSOP-mallissa rataparametrit on ilmaistu ajan funktiona. Mukaan otetaan useita termejä, jotka kuvaavat eri häiriövoimia. Rataparametrit ovat optimaalinen tapa ratojen kuvaamiseen, sillä ne säilyvät lähes vakioina. VSOP-malli tarjoaa kuitenkin mallit myös muunlaisille koordinaateille. Käytetään tässä nyt malleja VSOP87A ja VSOP87E, jotka kertovat taivaankappaleiden paikat suoraan suorakulmaisessa koordinaatistossa. Suorakulmaisesta koordinaatiston x -akseli osoittaa kevätpäivän-tasaupisteeseen epookilla J2000.0 ja xy -tason on yhtenevä Maan ratatason kanssa. Sanotaan, että koordinaatistot ovat *ekliptisiä*. VSOP87A-mallissa koordinaatiston origo on Aurinko ja VSOP87E mallissa Aurinkokunnan massakeskipiste.

VSOP87-malliin kuuluvat taulukot on saatavilla verkossa esimerkiksi lähteestä [59]. Käytetään Eran O. Ofekin toteuttamaa koodia [43] paikkakoordinaattien laskemiseen näistä VSOP-tiluista. Koodiin kuuluu myös muunnosmatriisi, jolla voi muuntaa ekliptiset eli ratatasoon perustuvat koordinaatit ekvatoriaalisiksi. Tämän muunnoksen jälkeen VSOP87A ja VSOP87E -mallien koordinaatistot ovat melkein luvussa 2 kuvatus ICRS-koordinaatiston mukaisia: x -akseli osoittaa epookin J2000.0 tasuspisteeseen ja xy -taso on saman epookin ekvaattoritaso, ainoastaan origot poikkeavat.

Merkitään näitä VSOP87A ja VSOP87E malleilla saatuja koordinaatteja, jotka on muunnettu ekvatoriaalisiksi merkinnöin \vec{r}_A ja \vec{r}_E . Merkitään yläindeksiin sen taivaankappaleen tunnus, jonka paikkakoordinaatit ovat kyseessä. Tässä tarvitaan nyt seuraavia: \vec{r}_A^{emb} , \vec{r}_E^{maa} ja \vec{r}_E^{aur} , missä emb (Earth-Moon barycenter) tarkoittaa Maan ja Kuun yhteistä massakeskipistettä. Kuun koordinaatteja ei ole suoraan VSOP-tilukossa, mutta ne saadaan laskettua näiden avulla.

Lasketaan aluksi Maan ja Kuun massakeskipisteen paikka E-koordinaatistossa

$$\vec{\mathbf{r}}_E^{\text{emb}} = \vec{\mathbf{r}}_A^{\text{emb}} + \vec{\mathbf{r}}_E^{\text{aur}},$$

minkä jälkeen Kuun paikka Aurinkokunnan massakeskipistekeskeisessä koordinaatistossa E voidaan laskea seuraavasti:

$$\vec{\mathbf{r}}_E^{\text{kuu}} = \frac{(M_E + M) \vec{\mathbf{r}}_E^{\text{emb}} - M_E \vec{\mathbf{r}}_E^{\text{maa}}}{M}.$$

Yllä oleva kaava seuraa suoraan artikkelin [7] kaavasta

$$\text{BE} = \frac{\mu}{1 + \mu} \text{EM},$$

missä BE on vektori emb:stä Maahan, EM on vektori Maasta Kuuhun ja μ on Maan ja Kuun massojen suhde M/M_E .

Nyt kun Kuun paikkakin on selvillä, tarvitsee enää siirtää koordinaatiston origo Maan massakeskipisteeseen:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{r}}_{\text{ICRS}}^{\text{kuu}} &= \vec{\mathbf{r}}_E^{\text{kuu}} - \vec{\mathbf{r}}_E^{\text{maa}} \\ \vec{\mathbf{r}}_{\text{ICRS}}^{\text{aur}} &= \vec{\mathbf{r}}_E^{\text{aur}} - \vec{\mathbf{r}}_E^{\text{maa}}. \end{aligned}$$

Tuloksena saatiin Kuun ja Auringon paikkavektorit ICRS-koordinaatistossa, mikä onkin tuttu koordinaatisto luvusta 2.

3.3 Auringon säteilypaine

Kolmanneksi suurin satelliitin rataa häiritsevä tekijä on Auringon säteilypaine. Sen aiheuttamaa kiihtyvyyttä on vaikea määrittää, sillä satelliitin muoto on monimutkainen ja eri osat absorboivat ja emittoivat säteilyä eri lailla. Lisäksi voiman suuruuteen vaikuttaa satelliitin suuntaus avaruudessa, satelliitin massa, sekä Auringon säteilyn intensiteetin heilahtelut.[50, s. 43] Välillä satelliitti joutuu myös Maan tai muun taivaankappaleen varjoon, jolloin säteilypaineen vaikutus katkeaa hetkeksi [34, s. 80]. Näistä syistä säteilypaineelle on vaikea muodostaa tarkkaa mallia. Se onkin yksi niistä pullonkauloista, jotka rajoittavat ennustuksen tarkkuutta luvun 5 testeissä.

Johdetaan seuraavaksi tämän työn tarkoituksiin soveltuva hyvin yksinkertainen säteilypainemalli, mikä löytyy kirjasta [34]. Olkoon Auringosta lähtevien fotonien aiheuttama paine P_f ja olkoon satelliitin aurinkopaneelien pinta-ala A . Jätetään muu satelliitin ala huomiotta ja oletetaan myös, että aurinkopaneelit ovat kohtisuorassa Auringon säteitä vastaan. Kun fotonit absorboituvat alaan A , niin ne pysähtyvät. Siis ajanjakson Δt aikana niiden yhteenlasketun liikemäärän muutos on

$$\Delta \vec{\mathbf{p}} = P_f A \Delta t \vec{\mathbf{e}}_{\text{aur}}, \quad (3.23)$$

missä \vec{e}_{aur} on yksikkövektori satelliitista Auringon suuntaan. Satelliitin liikemäärän muutos on sama, mutta vastakkaisuuntainen, ja satelliittiin kohdistuva voima saadaan liikemäärän aikaderivaattana:

$$\vec{F}_{\text{abs}} = -\frac{d\vec{p}}{dt} = -P_f A \vec{e}_{\text{aur}}. \quad (3.24)$$

Jos fotonit absorboitumisen sijaan heijastuvat pinnasta A , niin niiden yhteenlaskettu liikemäärä muuttuu vastakkaismerkkiseksi. Tällöin liikemäärän muutos on kaksinkertainen verrattuna absorboituvien fotonien liikemäärään (3.23) ja myös satelliittiin vaikuttava voima kaksinkertaistuu:

$$\vec{F}_{\text{emit}} = -2P_f A \vec{e}_{\text{aur}}. \quad (3.25)$$

Kirjoitetaan sitten säteilypainne tarkempaan muotoon merkitsemällä säteilypainetta Maan etäisyydellä P_0 :lla. Säteilypainne kasvaa ja vähenee suhteessa etäisyyden neliöön, joten

$$P_f = P_0 \frac{AU^2}{r_{\text{aur}}^2}, \quad (3.26)$$

missä r_{aur} on satelliitin etäisyys Auringosta ja AU on astronominen yksikkö, Maan keskimääräinen etäisyys Auringosta.

Merkitään aurinkopaneelien heijastuskerrointa kirjaimella ϵ . Heijastuskerroin kertoo emittoituvien fotonien osuuden, jolloin absorboituvien osuudeksi jää $1 - \epsilon$. Olkoon satelliitin massa m . Käyttäen lausekkeita (3.24)-(3.26) saadaan säteilypaineen aiheuttamaksi kiihtyvyydeksi

$$\vec{a}_{\text{asp}} = \frac{(1 - \epsilon)\vec{F}_{\text{abs}} + \epsilon \vec{F}_{\text{emit}}}{m} = -P_0 (1 + \epsilon) \frac{AU^2}{r_{\text{aur}}^2} \frac{A}{m} \vec{e}_{\text{aur}}.$$

Nyt ongelmana on enää se, että kaikille kaavassa oleville vakioille ei ole tiedossa tarkkoja arvoja. Etenkin heijastuskerroin, satelliitin pinta-ala ja massa saattavat hyvinkin vaihdella satelliitista toiseen. Tämän takia asetetaan vakioille mahdollisimman realistiset arvot, ja lisätään lausekkeen eteen vakiokerroin α , jonka arvo estimoidaan kullekin satelliitille sopivaksi. Estimoinnista kerrotaan lisää luvussa 3.4.

Kaavassa esiintyville vakioille käytetään tässä työssä taulukon 3.1 arvoja. Satelliitin massa ja aurinkopaneelien ala on otettu kirjasta [26, s. 776-777], muut teoksesta [34]. Massa on satelliitin arvioitu massa, kun se on kiertoradallaan. Ennen laukaisua avaruuteen massa on toki suurempi suuren polttoainemäärän vuoksi. Suluissa oleva tunnus IIR kertoo, mistä satelliittisukupolvesta, eli *blokiista*, on kyse. Kirjoitushetkellä, lokakuussa 2009 taivaalla olevista satelliiteista 12 kpl kuuluu sukupolven IIA, jotka ovat vähitellen jo poistumassa käytöstä. Loput 20 kpl kuuluvat myöhempään IIR sukupolven [58]. Niinpä valitaan IIR-satelliitin massa oletusmassaksi. Estimoitava parametri α korjaa sitten tästäkin oletuksesta syntyvää virhettä, kun estimointi tehdään erikseen kullekin satelliitille.

Taulukko 3.1: Säteilypainelausekkeen vakioita

P_0	ϵ	AU	A	m
$4.56 \cdot 10^{-6} \text{ Nm}^{-2}$	0.21	149 597 870.691 km	13.4 m ² (IIR)	1075 kg (IIR)

Parametrin α lisäksi otetaan säteilypainelausekkeen eteen vielä toinenkin parametri, varjostusfunktio λ . Sen arvo on useimmiten 1, mutta satelliitin joutuessa Maan varjoon tulee parametrin arvoksi nolla. Näiden välissä on lisäksi siirtymävaihe $0 < \lambda < 1$, jolloin satelliitti on penumbrassa eli puolivarjossa. Parametrin arvo saadaan laskettua, kunhan tiedetään satelliitin sekä Auringon sijainti Maahan nähden. Varjostusfunktioista voi lukea kirjasta [34, s. 81-83]. Varjostustermien ja parametrin α kanssa saadaan säteilypainelausekkeen aiheuttamalle kiihtyvyydelle lauseke

$$\vec{a}_{\text{asp}} = -\alpha \lambda P_0 (1 + \epsilon) \frac{AU^2}{r_{\text{aur}}^2} \frac{A}{m} \vec{e}_{\text{aur}}. \quad (3.27)$$

3.4 Parametrin estimointi

Kalmanin suodin

Tarkastellaan systeemiä, jonka *tilaa* voidaan kuvata vektorin $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ avulla. Systeemin tilaa ei tiedetä tarkasti, joten sitä mallinnetaan satunnaismuuttujalla. Esimerkiksi alkuaikahetkellä tilaa $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ voidaan kuvata sen odotusarvon $E(\vec{x}_0) = \hat{\vec{x}}_0$ sekä kovarianssimatriisin

$$\mathbf{P}_0 = E\left((\vec{x}_0 - \hat{\vec{x}}_0)(\vec{x}_0 - \hat{\vec{x}}_0)^T\right)$$

avulla, mikä kuvaa hajonnan suuruutta.

Alkuhetken t_0 jälkeen systeemin tila alkaa muuttumaan *tilamallin*

$$\vec{x}_k = \vec{f}(\vec{x}_{k-1}) + \vec{w}_k \quad (3.28)$$

mukaisesti. Tässä on merkitty $\vec{x}(t_k) = \vec{x}_k$ ja \vec{w}_k on satunnaismuuttuja, joka kuvaa mallin epävarmuutta. Samaan aikaan vastaanotetaan mittauksia, joiden tilariippuvuutta voidaan kuvata *mittausmallin*

$$\vec{y}_k = \vec{h}(\vec{x}_k) + \vec{v}_k$$

avulla. Satunnaismuuttuja \vec{v}_k kertoo mittausvirheen.

Suodatusongelmaksi sanotaan tehtävää, jossa yritetään ratkaista systeemin todellinen tila kohinaisten mittausten \vec{y}_k perusteella. *Kalmanin suodin* on algoritmi sellaisen suodatusongelman ratkaisemiseksi, missä sekä tilamalli että mittaus-

malli ovat lineaarisia, eli muotoa $\vec{f}(\vec{x}_{k-1}) = \mathbf{F}\vec{x}_{k-1}$ sekä $\vec{h}(\vec{x}_k) = \mathbf{H}\vec{x}_k$, ja jossa virheet \vec{w}_k ja \vec{v}_k ovat riippumattomia ja normaalijakautuneita. Kalmanin suotimen ideana on laskea epävarman alkutilan aikaevoluutiota tilamallin (3.28) perusteella, mutta aina mittauksen saapuessa päivittää tilan odotusarvoa ja kovarianssimatriisia mittauksen mukaan. Kunkin ajanhetken t_k tilaestimaattiin vaikuttaa alkutilan lisäksi kaikki siihen asti vastaanotetut mittaukset. Näin lasketuissa tilaestimaateissa on käytetty mahdollisimman hyvin hyödyksi kaikki saatavilla oleva mittaustieto. Kalmanin suotimen algoritmin voi löytää suodatusta tai estimointia käsittelevistä kirjoista, kuten [22, s. 198-199] tai [53, s. 128-129].

Kalmanin suodinta voidaan käyttää myös estimointiin. Esimerkiksi tilamallin funktio \vec{f} saattaa riippua tuntemattomista parametreista. Tällöin parametrit \vec{p} liitetään tilavektorin jatkoksi: $(\vec{x}^T, \vec{p}^T)^T$. Tilan aikaevoluutiota lasketaan aivan kuten suodatuksessakin ja korjataan saapuneiden mittaustulosten mukaan. Onnistuneessa estimoinnissa parametrit \vec{p} suppenevat kohti sellaisia arvoja, että tilafunktio $\vec{f}(\vec{x}, \vec{p})$ sopii mahdollisimman hyvin tiedossa oleviin mittaustuloksiin \vec{y}_k .

Estimointi laajennetulla Kalmanin suotimella

Perinteinen Kalmanin suodin on tarkoitettu lineaarisille suodatusongelmille, mutta vastaavia algoritmeja on kehitetty myös epälineaaristen ongelmien ratkaisuun. Eräs tällainen algoritmi on *laajennettu Kalmanin suodin* (eng. extended Kalman filter), joka toimii kuten Kalmanin suodin, mutta epälineaarisia tila- tai mittaustulofunktioita approksimoidaan linearisoimalla funktio aina kunkin ajanhetken tilaestimaatin suhteen [14, s. 170; 47, s. 19; 53, s. 400]. Tehdyn approksimaation takia laajennettu Kalmanin suodin ei välttämättä suppene ja saattaa jopa supeta kohti väärää arvoa [1, s. 47; 22, s. 347-349]. Monesti se kuitenkin antaa hyviä tuloksia. Kerrotaan seuraavaksi tarkemmin, kuinka säteilypaineparametri α saadaan estimoitua laajennettua Kalmanin suodinta käyttäen.

Tilavektori koostuu tässä tapauksessa paikkamuuttujista \vec{r} , nopeuksista \vec{v} sekä estimoitavasta parametrilla α :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{v} \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Satelliitin alkutilan paikka ja nopeus saadaan satelliitin efemeridistä. Käytetään tässä Broadcast-efemeridiä tarkempaa *Precise-efemeridiä* lähteestä [40]. Parametrille asetetaan alkuarvo $\alpha = 1$. Alkutilan kovarianssimatriisi pitää myös arvioida, ja tässä tapauksessa arvio saadaan käytetyn efemeridin tarkkuudesta. Parametrin α varianssiksi voidaan laittaa jotain suurta suppenemisen nopeuttamiseksi.

Kappaleissa 3.1-3.3 on esitelty voimia jotka satelliittiin vaikuttavat, sekä lausekkeita niiden aiheuttamille kiihtyvyyksille. Jos satelliitin kokonaiskiihtyvyyttä merkitään $\vec{a}(\vec{x}, t)$, niin tilan aikaevoluutio noudattaa differentiaaliyhtälöä

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{a}(\vec{x}, t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{x})_{4:6} \\ \vec{a}(\vec{x}, t) \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{g}(\vec{x}, t). \quad (3.29)$$

Tilamalli on tämän perusteella

$$\vec{x}(t_k) = \vec{x}_{k-1} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \vec{g}(\vec{x}, t) dt + \vec{w} = \vec{f}(\vec{x}_{k-1}) + \vec{w}, \quad \vec{w} \sim \mathcal{N}(\vec{0}, \mathbf{Q}),$$

missä \vec{w} kuvaa tilamallin virhettä ja \mathbf{Q} on sen kovarianssimatriisi. Tilamallin virhe syntyy siitä, että kaikkia satelliittiin vaikuttavia voimia ei ole voitu huomioida. Virhe ei välttämättä ole normaalijakautunut, vaikka tässä niin oletetaan.

Mittaukset saadaan tässä tapauksessa satelliitin precise-efemeridistä. Mitataan nyt ainoastaan paikkaa, jolloin mittausmalli on

$$\vec{y}_k = \vec{h}(\vec{x}_k) + \vec{v} = (\vec{x}_k)_{1:3} + \vec{v} = \mathbf{H}\vec{x}_k + \vec{v}, \quad \vec{v} \sim \mathcal{N}(\vec{0}, \mathbf{R}),$$

ja kerroinmatriisi $\mathbf{H} = (\mathbf{I}^{3 \times 3} \mid \mathbf{0}^{3 \times 4})$.

Mittausmallissa ja tilamallissa esiintyvien matriisien ja funktioiden lisäksi laajennettu Kalmanin suodin tarvitsee matriisin Φ . Määritellään Φ sellaiseksi matriisiksi, että

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, \tau) = \frac{d\vec{g}}{d\vec{x}}\Phi(t, \tau), \quad \text{ja} \quad \Phi(\tau, \tau) = \mathbf{I}, \quad \forall \tau.$$

Tässä funktio \vec{g} on sama kuin yhtälössä (3.29). Jos \vec{g} olisi lineaarinen funktio, eli $\vec{g}(\vec{x}, t) = \mathbf{G}(t)\vec{x}$, niin matriisi $\Phi(t, \tau)$ olisi ns. *tilansiirtomatriisi*, jolla kertominen muuttaa tilan $\vec{x}(\tau)$ tilaksi $\vec{x}(t)$. Nyt kun \vec{g} on epälineaarinen, niin tilansiirtomatriisi lasketaan varsinaisen funktion \vec{g} sijaan sen lineaariselle approksimaatiolle. Linearisoinnista voi lukea tarkemmin kirjallisuudesta [22, s. 272-273].

Laajennetussa Kalmanin suotimessa tarvitaan kullakin iteraatiolla matriisi $\Phi(t_k, t_{k-1})$. Se saadaan, kun ratkaistaan numeerisesti differentiaaliyhtälö

$$\frac{d}{dt}\Phi(t_k, t_{k-1}) = \frac{d\vec{g}(\dot{\vec{x}}(t), t)}{d\vec{x}}\Phi(t_k, t_{k-1}),$$

alkuehdolla $\Phi(t_{k-1}, t_{k-1}) = \mathbf{I}$. Kuten jo aiemmin mainittiin, tehdään laajennetussa Kalmanin suotimessa linearisointi aina uusimman tilaestimaatin suhteen. Siksi funktion \vec{g} derivaatta lasketaan vertailukäyrällä $\dot{\vec{x}}$, joka on differentiaaliyhtälön

$$\frac{d\dot{\vec{x}}(t)}{dt} = \vec{g}(\dot{\vec{x}}(t), t)$$

ratkaisukäyrä, kun alkuehtona on käytetty uusinta tilaestimaattia $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$. Merkitään matriisia $\Phi(t_k, t_{k-1})$ jatkossa Φ_{k-1} , eli indeksinä sen tilanestimaatin indeksi, jota on käytetty matriisiin laskemiseen.

Kirjoitetaan sitten varsinainen algoritmi. Se on laajennetusta Kalmanin suotimesta versio, jonka tilamalli on jatkuva ja mittaussmalli diskreetti. Tällainen löytyy lähteistä [22, s. 278] ja [53, s. 405]. Lisäksi tässä on oletettu mittaussfunktio lineaariseksi. Epälineaarisisessa tapauksessa pitäisi \mathbf{H} :n paikalle kirjoittaa mittaussfunktion derivaatta vertailukäyrällä $\hat{\mathbf{x}}(t)$, paitsi posteoritilaa $\hat{\mathbf{x}}_k$ laskiessa, sillä silloin se ei ole tarpeen.

Algoritmi 3.4.1 (Laajennettu Kalmanin suodin). *Lasketaan ensin seuraavat ennusteet, priori-estimaatit*

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_k^- &= \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \vec{g}(\hat{\mathbf{x}}, t) dt \\ \mathbf{P}_k^- &= \Phi_{k-1} \mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k-1}^T + \mathbf{Q}\end{aligned}$$

Sitten korjataan ennustetta saapuneen mittauksen mukaan. Saadaan posteriori-estimaatit $\hat{\mathbf{x}}_k$ ja \mathbf{P}_k .

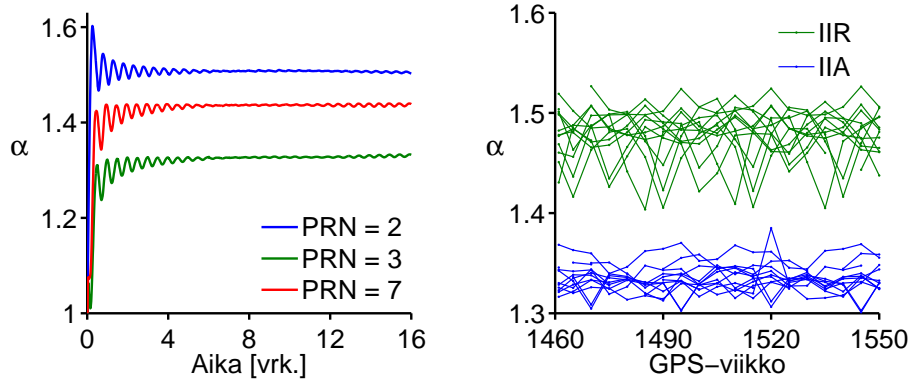
$$\begin{aligned}\mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k^-) \\ \mathbf{P}_k &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H})^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R} \mathbf{K}_k^T\end{aligned}$$

Estimoinnin tuloksia

Parametri α estimoitiin satelliiteille Algoritmia 3.4.1 käyttäen. Tarvittaville kovarianssimatriiseille \mathbf{P}_0 , \mathbf{Q} ja \mathbf{R} kokeiltiin erilaisia arvoja, ja valittiin kokeiluista matriiseista sellaiset, joilla estimointi suppeni nopeimmin. Estimoinnissa käytetyt kovarianssimatriisit löytyvät Liitteestä A.

Kuvan 3.2 vasemmanpuoleisesta kuvaajasta näkyy, kuinka parametri α suppenee ajan mukana. Estimoinnin mittaussdatana on käytetty satelliittien Precise-efemeridiä GPS-viikon 1500 alusta 16 päivää eteenpäin. Tulokset on esitetty vain 3 satelliitille esimerkin vuoksi, mutta suppeneminen tapahtui muillekin satelliiteille. Parametrin suppenemiskäyrään jäi pientä oskillointia, joten estimoinnin lopputulokseksi valittiin viimeisen α -arvon sijaan kolmen viimeisen vuorokauden keskiarvo. Estimoidut arvot vaihtelivat hieman satelliitista toiseen, suurinpiirtein välillä 1.3-1.5. Parametri oli kuitenkin kaikissa tapauksissa selvästi oletusarvoa $\alpha = 1$ suurempi.

Kuvan 3.2 oikeanpuoleisessa kuvaajassa on pyritty selvittämään, pysyykö estimoitu parametri samana pidemmällä aikavälillä. Siinä estimointi on tehty vasemmanpuoleisen kuvan tavalla usealle 16-päivän ajanjaksolle. Ajanjaksojen alkuhetket on valittu vuoden 2008 alun ja vuoden 2009 lokakuun väliseseltä ajalta, mikä vastaa



Kuva 3.2: Vasemmalla: Parametrin α suppeneminen kolmelle eri satelliitille. Estimoinnissa on käytetty mittausedatana satelliitin Precise-efemeridiä GPS-viikon 1500 alusta 16 päivää eteenpäin. PRN (Pseudo Random Number) on luku, jolla vastaanotin erottaa satelliitit toisistaan. Oikealla: Estimoinnin tuloksia 16-vuorokautisen mittausedatan alkuhetken funktiona. Satelliittisukupolvien IIR ja IIA välillä on selvä ero.

GPS-viikkoja 1460-1550. Estimoidut arvot on piirretty kuvaan pisteinä, ja aina saman satelliitin pisteet on yhdistetty toisiinsa viivalla. Tulosten joukosta on poistettu selvästi virheelliset arvot, joiden syynä voivat olla esimerkiksi ohjatut ratakorjaukset (Katso kappale 3.5) tai satelliitin siirtyminen Maan varjoon.

Oikeanpuoleisesta kuvaajasta nähdään, että satelliittisukupolvien IIR ja IIA parametreilla on selkeä ero. Niinpä mallissa tulisi käyttää erilaista säteily-paineparametrin arvoa riippuen satelliitin blokista. Toisaalta, parametrin arvo vaihtelee myös yksittäisestä satelliitista toiseen, joten lasketaan varmuuden vuoksi parametri erikseen jokaiselle satelliitille, eikä vain kahdelle blokille. Kunkin satelliitin parametri vaihtelee hieman ajan funktiona, joten lasketaan satelliittikohtaiset aikakeskiarvot. Tulokset on kirjattu taulukkoon 3.2 ja ne ovat käytössä tämän työn voimamallissa.

Taulukko 3.2: Satelliittikohtaiset parametrit α

PRN	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
α	-	1.48	1.33	1.34	1.33	1.33	1.44	1.33	1.33	1.33	1.48
	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
	1.44	1.49	1.49	1.46	1.48	1.43	1.49	1.47	1.48	1.46	1.48
	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	
	1.51	1.36	1.34	1.33	1.33	1.46	1.42	1.33	1.45	1.35	

Parametrien arvoihin liittyen on huomattava, että ne pätevät ainoastaan sille tietylle satelliitille, jolle arvo on estimoitu. Kun GPS-järjestelmän satelliitteja päivitetään, otetaan jokin vanha satelliitti pois, ja siirretään sen PRN-numero jonkin uudemman satelliitin tunnusluvuksi. Näin taulukon 3.2 arvot ovat totuudenmukaisia nimenomaan GPS-viikkojen 1460-1550 aikana, eikä niitä muulloin ole järkevä käyttää.

Kulloinkin käytössä olevista satelliiteista, uusien satelliittien käyttöönotosta ja poistamisesta löytyy tietoa lähteestä [58].

3.5 Muut häiriöt

Taulukossa 3.3 on lueteltu satelliittiin vaikuttavia voimia, sekä niille tyypillisiä kiihtyvyyksiä. Lisäksi on listattu voiman vaikutus satelliitin paikkaan vuorokauden mittaisessa ennustuksessa. Kiihtyvyyksistä ei voi suoraan päätellä paikkavirhettä, sillä myös voiman suunta vaikuttaa virheen suuruuteen. Taulukon 3.3 arvot on koottu lähteistä [62] ja [46, s. 153], ja ne pätevät ainoastaan GPS-satelliittien etäisyydellä, noin 26 000 km päässä Maan massakeskipisteestä. Taulukossa ensimmäisenä oleva Maan gravitaation Y_{02} -termi tarkoittaa sitä osaa gravitaatiosta, joka vastaa summan (3.13) termiä $n = 0$ ja $m = 2$.

Taulukko 3.3: Satelliittiin vaikuttavia voimia. [46, s.153; 62]

Voima	Kiihtyvyys [m/s ²]	Virhe paikassa [m/vrk]
Maan gravitaation Y_{02} -termi	$1.0 \cdot 10^{-4}$	10 000
Kuun gravitaatio	$3.9 \cdot 10^{-6}$	3 000
Auringon gravitaatio	$1.0 \cdot 10^{-6}$	800
Muut Maan gravitaatiotermi	$3 \cdot 10^{-7}$	200
Auringon säteilypaine	$7.2 \cdot 10^{-8}$	200
Säteilypaine, "y-bias"	$5 \cdot 10^{-10}$	2
Maasta heijastunut säteily	$4 \cdot 10^{-10}$	0.03
Suhteellisuusteoreettiset ilmiöt	$3 \cdot 10^{-10}$	0.01
Vuorovesi, kiinteä Maa	$1 \cdot 10^{-9}$	0.3
Vuorovesi, meret	$5 \cdot 10^{-8}$	0.04
Venuksen gravitaatio	$1.1 \cdot 10^{-10}$	
Jupiterin gravitaatio		
Ilmakehän vastus		
Sähkömagneettiset vuorovaikutukset		
Ohjatut ratakorjaukset		

Tässä työssä otetaan huomioon taulukon 3.3 viisi ensimmäistä voimaa ja loput jätetään huomiotta niiden pienuuden vuoksi. Kerrotaan silti lyhyesti myös muista voimista. Ensimmäisenä listassa on y-bias, mikä liittyy Auringon säteilypaineeseen. Kappaleessa 3.3 kuvattu säteilypainemalli oletti, että aurinkopaneelit ovat kohtisuorassa Auringon säteitä vastaan. Todellisuudessa ne ovat hieman vinossa, mistä aiheutuu toisen suuntainen säteilypainekomponentti. Y-biaksen lisäksi Auringon säteilypaine vaikuttaa kolmannellakin tavalla: Maasta heijastuneena säteilynä. Tämä säteily lähtee Auringosta, mutta osuessaan Maan ilmakehään, se heijastuu edelleen kohti satelliittia. Tällä voimalla on enää hyvin pieni vaikutus satelliitin paikkaennusteeseen. [50]

Satelliitin likeyhtälön muodostamisessa käytettiin perinteistä Newtonin fysiikkaa, ja jätettiin suhteellisuusteoreettiset ilmiöt huomiotta. Tästä aiheutuva paikkavirhe on vain senttimetrin luokkaa, mutta tarkimmissa ennusteissa nämäkin ilmiöt otetaan huomioon [34, s. 111]. Seuraavana listassa olevat vuorovesi-ilmiöt syntyvät, kun sekä meret, että kiinteä Maa muuntuu hieman eri muotoon riippuen Kuun tai Auringon sijainnista.

Lausekkeen (3.22) perusteella laskettiin Kuun ja Auringon aiheuttamat gravitaatiokiihtyvyydet. Vastaavaa lauseketta voidaan käyttää myös planeetoista aiheutuvien gravitaatiokiihtyvyyksien laskemiseen: Venus ja Jupiter ovat ne kaksi planeettaa, joilla on suurin vaikutus satelliitin rataan. Myös ilmakehän vastus jätetään tyyppillisesti pois laskuista, kun käsitellään GPS-satelliitteja, sillä 26 000 km etäisyydellä ilmakehän tiheys on jo erittäin pieni.

Satelliitit ovat sähköisesti varautuneita, sillä ne törmäilevät ioneihin ja elektroneihin, ja sen vuoksi Maan magneettikenttä vastustaa satelliitin liikettä. Tätä on kuitenkin vaikea mallintaa, eikä voima ole kovin suuri, joten se jätetään tarkemmissakin sovelluksissa huomiotta. Viimeisenä listassa on vielä ohjatut ratakorjaukset. GPS-satelliittien rataa korjataan silloin tällöin, jotta satelliitit säilyttäisivät sen asetelman taivaalla, mikä niille on suunniteltu. Tällaisen ratakorjauksen aikana satelliitin rataa ei voida ennustaa. [50]

Luku 4

Liiketyhtälön numeerinen ratkaisu

Luvussa 3 tarkasteltiin satelliittiin vaikuttavia voimia ja valittiin niistä tärkeimmät: Maan gravitaatio, Auringon ja Kuun gravitaatio, sekä Auringon säteilypaine mukaan malliin. Jos merkitään näiden kolmen voiman yhteisvaikutusta \vec{F} , satelliitin paikkavektoria \vec{r} ja massaa m , saadaan liiketyhtälöksi

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}}{m} = \vec{a}_g + \vec{a}_{kuu} + \vec{a}_{aur} + \vec{a}_{asp}.$$

Tämä on muotoa

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}), \quad (4.1)$$

eli 2. asteen differentiaaliyhtälö. Kiihtyvyyskenttien lausekkeista (3.3), (3.22) ja (3.27) nähdään kuitenkin, että ne riippuvat paikasta \vec{r} , ajasta t , mutta eivät satelliitin nopeudesta. Niinpä yhtälö (4.1) yksinkertaistuu muotoon

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a}(t, \vec{r}). \quad (4.2)$$

Tämä on helpompi tunnistaa kolmen 2. asteen differentiaaliyhtälön ryhmäksi, kun kirjoitetaan se vektorimerkintöjen sijaan komponenteittain, eli

$$\begin{cases} \ddot{x} = a_x(t, x, y, z) \\ \ddot{y} = a_y(t, x, y, z) \\ \ddot{z} = a_z(t, x, y, z). \end{cases} \quad (4.3)$$

Suurin osa differentiaaliyhtälöiden numeerisista ratkaisijoista on tehty 1. astetta olevien yhtälöiden ratkaisemiseen. Näitä ratkaisijoita varten yhtälöryhmä (4.3) pitää ensin muuntaa 1. asteen differentiaaliyhtälöryhmäksi. Se onnistuu ottamalla käyttöön kolme lisämuuttujaa $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$ ja merkitsemällä 1. asteen derivaattoja \dot{x} , \dot{y} ja \dot{z} niillä. Saadaan ensimmäisen asteen differentiaaliyhtälöryhmä

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{a}(t, \vec{r}) \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

missä on nyt kaksi kertaa niin paljon dimensioita, kuin alkuperäisessä 2. asteen differentiaaliyhtälöryhmässä.

Tässä Luvussa esitellään numeerisia integrointimenetelmiä satelliitin liikeyhtälön ratkaisemiseksi. Kappale 4.1 käsittelee Rungen ja Kuttan menetelmiä, jotka ovat paljon käytettyjä 1. asteen differentiaaliyhtälöiden ratkaisualgoritmeja. Luvussa 4.2 esitellään menetelmä, joka on erityisen tehokas muotoa (4.2) olevien 2. asteen differentiaaliyhtälöiden ratkaisuun. Luvun 4 viimeisissä osioissa vertaillaan eri ratkaisijoita keskenään ja valitaan sopivan pituinen aika-askel.

4.1 Rungen ja Kuttan menetelmät

Rungen ja Kuttan menetelmät on tarkoitettu alkuarvoprobleeman

$$\dot{\vec{y}}(t) = \vec{f}(t, \vec{y}(t)), \quad \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \quad (4.5)$$

ratkaisemiseen. Algoritmin ideana on selvittää annetun alkuehdon $\vec{y}(t_0)$ perusteella systeemin tila aika-askeleen h päästä. Tämä haettu $\vec{y}(t_0+h)$ voidaan esittää funktion \vec{f} integraalin avulla:

$$\vec{y}(t_0 + h) = \vec{y}(t_1) = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^{t_0+h} \vec{f}(t, \vec{y}(t)) dt. \quad (4.6)$$

Rungen ja Kuttan menetelmä on siis keino approksimoida yhtälön 4.6 integraalia.

Merkitään saatua tulosta \vec{y}_1 . Toistamalla algoritmi uudelle alkuehdolle $\vec{y}(t_1) = \vec{y}_1$, saadaan ratkaistua tila \vec{y} seuraavana ajanhetkenä, eli \vec{y}_2 . Näin jatketaan, kunnes päästään haluttuun ajanhetkeen t_n saakka. Seuraavassa on kuvattu kuinka yksi iteraatiokierros tapahtuu:

Algoritmi 4.1.1 (Rungen ja Kuttan menetelmä). *Merkitään kirjaimella s kokonaislukua, joka kertoo menetelmän vaiheiden määrän. Olkoon a_{ij} sekä b_i , missä $i, j = 1, \dots, s$ reaalityyppisiä ja olkoon $c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij}$. Tällöin s :n vaiheen Rungen ja Kuttan menetelmä laskee arvon $\vec{y}_1 \approx \vec{y}(t_0 + h)$ seuraavasti:*

$$\begin{aligned} \vec{k}_1 &= \vec{f}(t_0, \vec{y}_0) \\ \vec{k}_2 &= \vec{f}(t_0 + c_2 h, \vec{y}_0 + h a_{21} \vec{k}_1) \\ \vec{k}_3 &= \vec{f}(t_0 + c_3 h, \vec{y}_0 + h(a_{31} \vec{k}_1 + a_{32} \vec{k}_2)) \\ &\dots \\ \vec{k}_s &= \vec{f}(t_0 + c_s h, \vec{y}_0 + h(a_{s1} \vec{k}_1 + \dots + a_{s,s-1} \vec{k}_{s-1})) \\ \vec{y}_1 &= \vec{y}_0 + h \sum_{i=1}^s b_i \vec{k}_i \end{aligned}$$

Algoritmin 4.1.1 avulla voidaan muodostaa joukko Rungen ja Kuttan menetelmiä, kunhan valitaan kertoimet a_{ij} ja b_i eri tavoin. Kun halutaan esittää jokin tietty menetelmä, annetaan sen kertoimet yleensä Taulukon 4.1 muodossa [16, s. 135]. Samassa taulukossa oikealla on myös yhden menetelmän kertoimet esimerkkinä. Kutsutaan tätä menetelmää RK3 - menetelmäksi, sillä sen *kertaluku* on kolme. Tämä tarkoittaa sitä, että epäyhtälö

$$\|\vec{y}(t_1) - \vec{y}_1\| \leq Ch^{p+1}, \quad C \in \mathbb{R}$$

toteutuu, kun $p = 3$. Tällöin oikean tilan $\vec{y}(t_1)$ ja algoritmin antaman approksimaation \vec{y}_1 Taylorin sarjat ovat yhtenevät kolmannen asteen termiin saakka.

Taulukko 4.1: Vasemmalla: *Runge-Kutta -menetelmän kertoimet esitetään yleensä taulukon muodossa*. Oikealla: *Esimerkkinä kolmatta kertalukua oleva Bogacki-Shampine -menetelmä*.

0						0			
c_2	a_{21}					$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
c_3	a_{31}	a_{32}				$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots			RK3	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\cdots	$a_{s,s-1}$					
	b_1	b_2	\cdots	b_{s-1}	b_s				

4.2 Rungen, Kuttan ja Nyströmin menetelmä

Toisen asteen differentiaaliyhtälön $\ddot{\vec{r}} = \vec{a}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})$ alkuarvoprobleema voidaan ratkaista Rungen ja Kuttan algoritmilla 4.1.1, kunhan se ensin muokataan muotoon (4.5). Kuten Luvun johdannossa kerrottiin, on tila tällöin $\vec{y} = (\vec{r}^T, \vec{v}^T)^T$ ja funktiona f on

$$\vec{f}(t, \vec{y}) = \vec{f}(t, \vec{r}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{a}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) \end{pmatrix},$$

jolloin alkuarvoprobleema näyttää seuraavalta:

$$\begin{pmatrix} \dot{\vec{r}} \\ \dot{\vec{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{a}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \vec{r}(t_0) &= \vec{r}_0 \\ \vec{v}(t_0) &= \vec{v}_0. \end{aligned}$$

Kun Rungen ja Kuttan menetelmää sovelletaan tähän, saadaan

$$\begin{aligned} \vec{k}_i &= \vec{f}(t_0 + c_s h, \vec{y}_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \vec{k}_j), \quad i = 1, 2, \dots, s \\ \vec{y}_1 &= \vec{y}_0 + h \sum_{i=1}^s b_i \vec{k}_i. \end{aligned}$$

Jaetaan sitten vektorit $\vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{f}}$, $\vec{\mathbf{y}}_0$ ja $\vec{\mathbf{y}}_1$ kahtia, niin että toisessa osassa on kolme ensimmäistä, paikkaa vastaavaa komponenttia ja toisessa nopeutta vastaavat. Merkitään vektorin $\vec{\mathbf{k}}_i$ kahta osaa $\vec{\mathbf{k}}_{\vec{\mathbf{r}},i}$ ja $\vec{\mathbf{k}}_{\vec{\mathbf{v}},i}$ ja samaan tapaan $\vec{\mathbf{f}}_{\vec{\mathbf{r}}}$ ja $\vec{\mathbf{f}}_{\vec{\mathbf{v}}}$ funktiolle $\vec{\mathbf{f}}$.

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathbf{k}}_{\vec{\mathbf{r}},i} &= \vec{\mathbf{f}}_{\vec{\mathbf{r}}}(t_0 + c_i h, \vec{\mathbf{r}}_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \vec{\mathbf{k}}_{\vec{\mathbf{r}},j}, \vec{\mathbf{v}}_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \vec{\mathbf{k}}_{\vec{\mathbf{v}},j}) \\
 &= \vec{\mathbf{v}}_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \vec{\mathbf{k}}_{\vec{\mathbf{v}},j} \\
 \vec{\mathbf{k}}_{\vec{\mathbf{v}},i} &= \vec{\mathbf{f}}_{\vec{\mathbf{v}}}(t_0 + c_i h, \vec{\mathbf{r}}_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \vec{\mathbf{k}}_{\vec{\mathbf{r}},j}, \vec{\mathbf{v}}_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \vec{\mathbf{k}}_{\vec{\mathbf{v}},j}) \\
 &= \vec{\mathbf{a}}(t_0 + c_i h, \vec{\mathbf{r}}_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \vec{\mathbf{k}}_{\vec{\mathbf{r}},j}, \vec{\mathbf{v}}_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \vec{\mathbf{k}}_{\vec{\mathbf{v}},j}) \\
 \vec{\mathbf{r}}_1 &= \vec{\mathbf{r}}_0 + h \sum_{i=1}^s b_i \vec{\mathbf{k}}_{\vec{\mathbf{r}},i} \quad \vec{\mathbf{v}}_1 = \vec{\mathbf{v}}_0 + h \sum_{i=1}^s b_i \vec{\mathbf{k}}_{\vec{\mathbf{v}},i}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Ensimmäisen kaavan lopputulos (4.7) voidaan sijoittaa jälkimmäisiin yhtälöihin. Oletetaan lisäksi, että $c_i = \sum a_{ij}$. Tämä on ehto, minkä Rungen ja Kuttan kertoimet yleensä toteuttavat [16, s. 134]. Sijoituksen jälkeen yhtälöt ovat

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathbf{k}}_{\vec{\mathbf{v}},i} &= \vec{\mathbf{a}}(t_0 + c_i h, \vec{\mathbf{r}}_0 + c_i h \vec{\mathbf{v}}_0 + h^2 \sum_{j=1}^s \bar{a}_{ij} \vec{\mathbf{k}}_{\vec{\mathbf{v}},j}, \vec{\mathbf{v}}_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \vec{\mathbf{k}}_{\vec{\mathbf{v}},j}) \\
 \vec{\mathbf{r}}_1 &= \vec{\mathbf{r}}_0 + h \vec{\mathbf{v}}_0 + h^2 \sum_{j=1}^s \bar{b}_j \vec{\mathbf{k}}_{\vec{\mathbf{v}},j} \quad \vec{\mathbf{v}}_1 = \vec{\mathbf{v}}_0 + h \sum_{i=1}^s b_i \vec{\mathbf{k}}_{\vec{\mathbf{v}},i},
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

missä

$$\bar{a}_{ij} = \sum_{k=1}^s a_{ik} a_{kj}, \quad \bar{b}_i = \sum_{j=1}^s b_j a_{ji}. \tag{4.9}$$

Rungen, Kuttan ja Nyströmin menetelmä (RKN) on muotoa (4.8) oleva menetelmä, jossa kertoimet eivät välttämättä toteuta ehtoja (4.9), vaan ne säädetään nimenomaan toisen asteen differentiaaliyhtälön ratkaisuun sopiviksi [16, s. 284; 34, s. 124]. RKN on erityisen tehokas silloin, kun funktio $\vec{\mathbf{a}}$ ei riipu ollenkaan derivaatasta $\vec{\mathbf{r}}$. Tässä tapauksessa Nyströmin algoritmi yksinkertaistuu muotoon

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathbf{k}}_{\vec{\mathbf{v}},i} &= \vec{\mathbf{a}}(t_0 + c_i h, \vec{\mathbf{r}}_0 + c_i h \vec{\mathbf{v}}_0 + h^2 \sum_{j=1}^s \bar{a}_{ij} \vec{\mathbf{k}}_{\vec{\mathbf{v}},j}) \\
 \vec{\mathbf{r}}_1 &= \vec{\mathbf{r}}_0 + h \vec{\mathbf{v}}_0 + h^2 \sum_{j=1}^s \bar{b}_j \vec{\mathbf{k}}_{\vec{\mathbf{v}},j} \quad \vec{\mathbf{v}}_1 = \vec{\mathbf{v}}_0 + h \sum_{i=1}^s b_i \vec{\mathbf{k}}_{\vec{\mathbf{v}},i},
 \end{aligned}$$

eikä kertoimia a_{ij} tarvita. Satelliitin liikeyhtälössä kiihtyvyys $\vec{\mathbf{a}}$ ei riipu satelliitin nopeudesta, joten siihen voidaan käyttää tätä pelkistettyä versiota Nyströmin menetelmästä. Taulukossa 4.2 on esitetty viidettä kertalukua oleva Runge-Kutta-

Nyström -menetelmä, jossa kertoimia a_{ij} ei ole. Kutsutaan tätä menetelmää jatkossa lyhenteellä RKN5.

Taulukko 4.2: *Rungen, Kuttan ja Nyströmin menetelmä muotoa $\ddot{\vec{y}} = \vec{f}(t, \vec{y})$ oleville differentiaaliyhtälöille*

RKN5:	0				
	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{50}$	\bar{a}_{ij}		
	$\frac{2}{3}$	$\frac{-1}{27}$	$\frac{7}{27}$		
	1	$\frac{3}{10}$	$\frac{-2}{35}$	$\frac{9}{35}$	
	\bar{b}_i	$\frac{14}{336}$	$\frac{100}{336}$	$\frac{54}{336}$	0
	b_i	$\frac{14}{336}$	$\frac{125}{336}$	$\frac{162}{336}$	$\frac{35}{336}$

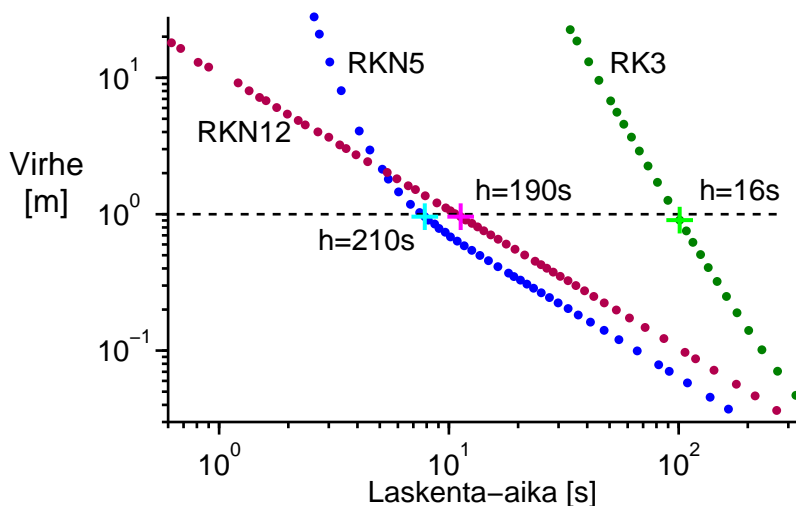
Liitteestä B löytyy toinenkin esimerkki Rungen, Kuttan ja Nyströmin menetelmistä. RKN12 on hyvin korkean kertaluvun ratkaisija, jossa on peräti 17 vaihetta. Menetelmä on pärjännyt moniin muihin integrointimenetelmiin verrattuna hyvin eräässä satelliittien ratojen ratkaisua käsittelevässä tutkimuksessa [33]. Artikkelissa [11] on kuvattu RKN12-menetelmän muodostaminen, sisältäen myös kertaluvun 10 RKN-kertoimet, joita käytetään vaihtuva-askeleisen version aika-askeleen pituuden tarkkailuun. Tässä työssä käytämme tasavälistä aikahilaa, joten liitteessä B on ilmoitettu ainoastaan 12-kertaluvun menetelmän kertoimet.

4.3 Ratkaisijan aika-askeleen valinta

Testataan RK sekä RKN -ratkaisijoita, ja pyritään selvittämään kullekin ratkaisijalle sopiva aika-askel. Tässä testattavat ratkaisijat käyttävät tasavälistä aikahilaa, mutta on olemassa myös vaihtuva-askeleisiä ratkaisijoita, jotka arvioivat jatkuvasti aika-askeleen sopivuutta ja muuttavat sitä tarvittaessa. Taivaankappaleiden ratojen numeerista integrointia on tutkittu aiemminkin, muun muassa julkaisuissa [4], [12] ja [31]. Niiden mukaan vaihtuva-askeleiset menetelmät ovat tehokkaampia silloin, kun integroitavan satelliitin rata on vahvasti elliptinen, eli ellipsin *eksentrisyys* on suuri [4; 12; 31, katso 4]. GPS-satelliittien eksentrisyys on noin 0.01, eli hyvin pieni, joten sen perusteella tasavälinen aikahila sopii tähän tilanteeseen paremmin.

Vertaillaan seuraavaksi kolmea erilaista differentiaaliyhtälön ratkaisijaa. Koska Luvussa 3 kuvattu voimamalli ei ole tarkka, niin numeerista virhettä ei voida selvittää vertaamalla ratkaisijoiden antamia tuloksia satelliitin todelliseen efemeridiin. Sen sijaan pitää selvittää referenssitila, joka saadaan ratkaisemalla satelliitin paikka hyvin pienellä aika-askeella. Numeerista virhettä lasketaan sitten tähän referenssitilaan nähden.

Tässä testattavat algoritmit RK3 ja RKN5 on esitetty luvuissa 4.1 ja 4.2. Kolmannen ratkaisijan RKN12 kertoimet löytyvät Liitteestä B. Testissä satelliitin rataa ennustetaan yhden vuorokauden verran eteenpäin. Referenssitila laskettiin RKN5 -ratkaisijan avulla, aika-askeleella $h = 1$ s, minkä jälkeen ennustus tehtiin suuremmilla aika-askeleilla sekä eri ratkaisijoilla. Kuvaan 4.1 on piirretty eri ratkaisijoilla syntyvät virheet integrointiin kuluneen laskenta-ajan funktiona.

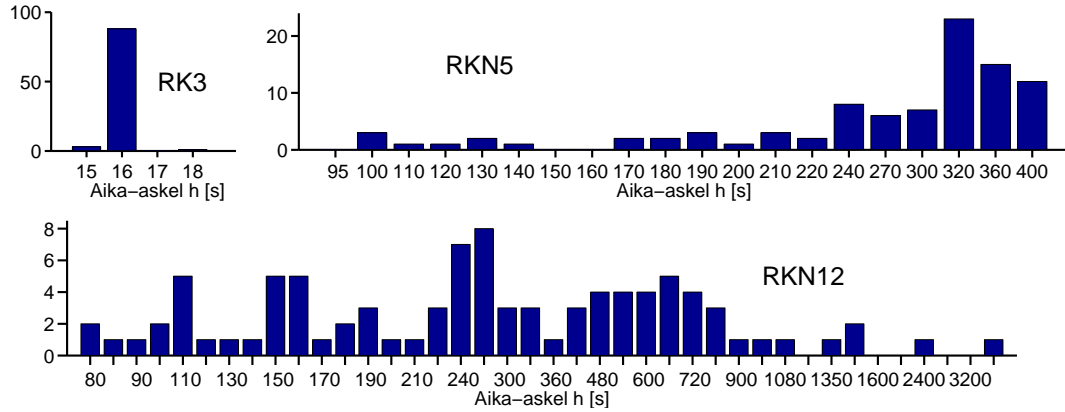


Kuva 4.1: *Differentiaaliyhtälön ratkaisijoiden vertailua*

Kuvan 4.1 musta katkoviiva on piirretty sille korkeudelle, missä numeerinen virhe on metrin suuruinen. Viivan alapuolelle on merkitty sellaiset aika-askeleet, joilla ratkaisijoiden virheet juuri alittavat metrin rajan. Jos metri on haluttu tarkkuus vuorokauden mittaiselta ennustukselta, näyttäisi RK5 olevan tähän tapaukseen paras ratkaisija ja sopiva aika-askel sille 210 s.

Koska Kuva 4.1 kertoo tilanteen ainoastaan yhden satelliitin osalta ja vain yhdeltä 24 tunnin mittaiselta ennustusjaksolta, ei aika-askeleta kuitenkaan kannata valita pelkästään sen perusteella. Tehdäänkin seuraavaksi sama testi useita eri satelliitteja ja ajanjaksoja käyttäen. Lasketaan metrin virheen alittavat aika-askeleet näissä kaikissa tapauksissa (92 kpl) ja piirretään Kuvaan 4.2 aika-askeleiden histogrammit kullekin ratkaisijalle.

RK3-ratkaisijalle metrin virheen alittava aika-askel on lähes aina 16 s, kun taas RKN-ratkaisijoiden aika-askeleilla on enemmän hajontaa. Tämä johtuu luultavasti siitä, että ratkaisijat olettavat integroitavan funktion olevan jatkuva ja sileä, mikä nyt ei pidä paikaansa säteilypainemallin varjostusfunktion takia. Mitä suurempi on ratkaisijan kertaluku, sitä suurempia aika-askeleita voidaan käyttää ja sitä enemmän virhettä syntyy, kun integroidaan ei-sileän kohdan yli. RKN5:n histogrammista nähdään, että sopivat aika-askeleet ovat painottuneet 300 s lähettyville, tosin välillä h on niinkin pieni kuin 100 s. RKN12-ratkaisijalle sopivassa aika-askeleessa on vieläkin suurempi hajonta, joten aika-askeleta on hyvin vaikea asettaa.



Kuva 4.2: Histogrammeja suurimmasta aika-askeleesta, jolla numeerinen virhe pysyi vuorokauden ennustuksen ajan alle metrissä.

Koska RKN5 näyttäisi kuvan 4.1 perusteella olevan hieman RKN12:ta parempi ja histogrammin mukaan sopivassa aika-askeleessa on vähemmän hajontaa, voidaan todeta se parhaaksi ratkaisijaksi. Valitaan RKN5:n aika-askeleeksi 100 sekuntia kuvan 4.2 perusteella, ja käytetään tätä ratkaisijaa luvun 5 testeissä. Kuvan 4.1 mukaan RKN12-ratkaisijan numeerinen virhe kasvaa kuitenkin RKN5:ttä maltillisemmin askelta h kasvatettaessa, joten liian suuri askel ei haittaa niin paljoa kuin RKN5:n tapauksessa. Tästä syystä RKN12 on RKN5:ttä parempi valinta silloin, kun laskenta-aika pitää saada mahdollisimman pieneksi.

4.4 Pohdiskelua integrointimenetelmistä

Rungn ja Kuttan sekä Rungen, Kuttan ja Nyströmin menetelmät ovat molemmat yksiaskelmenetelmiä, eli jokainen integrointiaskel riippuu ainoastaan edellisestä aika-askeleesta. Aiemmissa taivaankappaleiden ratojen integrointia käsittelevissä tutkimuksissa ovat kuitenkin *moniaskelmenetelmät* toimineet paremmin. Moniaskelmenetelmissä seuraavan ajanhetken tilan ratkaisuun käytetään funktion $f(t, y)$ arvoja useina aiempina ajanhetkinä.

Taivaankappaleiden ratojen ratkaisuun sopivia integrointimenetelmiä on vertailtu tutkimuksissa [12], [27], [31] ja [33]. Berry ja Healy kirjoittavat näiden tutkimusten tuloksista [4], että moniaskelmenetelmät pärjäsivät vertailuissa yksiaskelmenetelmiä paremmin. Foxin ja Mersonin tutkimuksissa toisen asteen differentiaaliyhtälöille tarkoitettu Gauss-Jackson -moniaskelmenetelmä toimii parhaiten [12; 31, katso 4]. Vain Montenbruck on sitä mieltä, että jotkin yksiaskelmenetelmät, kuten suuren kertaluvun Runge-Kutta-Nyström -ratkaisijat, voivat olla yhtä tehokkaita [33].

Integroinnin tehokkuuden lisäämiseksi kannattaisi kokeilla moniaskelmenetelmiä. Sopivia menetelmiä voisivat olla toisen asteen differentiaaliyhtälöille tarkoitettu Störmer-Cowell -menetelmä, tai Gauss-Jackson, joka on hieman muokattu versio siitä. Artikkelissa [5] on kerrottu tarkemmin näistä menetelmistä. Moni-

askelmenetelmien heikkous on, että integroinnin aloitus on monimutkaisempi, kun tarvitaan tietoa monesta aiemmasta aika-askeleesta. Lisäksi moniaskelmenetelmät olettavat, RK- ja RKN-menetelmien tavoin, että integroitava funktio on jatkuva ja sileä [3, s. 10]. Koska näin ei nyt ole, niin moniaskelmenelmissä tapahtuu luultavasti samaa ilmiötä kuin mitä korkean asteen RKN-menetelmien histogrammeista nähtiin.

Luku 5

Satelliitin radan ennustaminen

Tässä luvussa ennustetaan satelliitin rataa luvussa 3 esitetyllä mallilla, käyttäen kappaleen 2.4 koordinaatistoja ja luvussa 4 esiteltyä RKN5-ratkaisijaa. Saatuja tuloksia tarkastellaan, verrataan satelliitin todelliseen sijaintiin ja arvioidaan mahdollisia virhelähteitä.

5.1 Mallin testaus

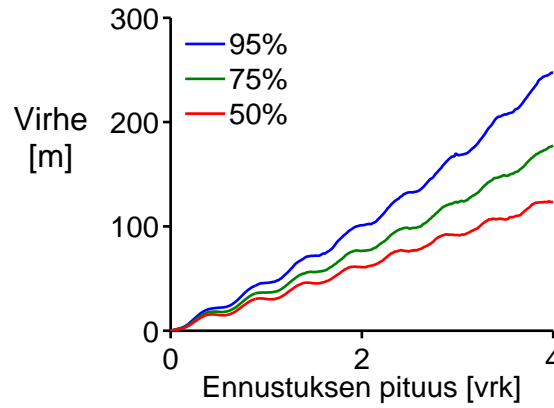
Jotta satelliitin rataa voitaisiin lähteä ratkaisemaan, tarvitaan sen todellinen alkupaikka sekä alkunopeus. Paikannuslaite saa laskettua ne helposti satelliitin lähetämien rataparametrien, broadcast efemeridin, avulla. Broadcast efemeridit eivät kuitenkaan ole täysin tarkkoja, vaan satelliitin ratavirhe on noin metrin luokkaa [21]. Lisäksi efemeridit ovat tarkimmillaan vain joka toinen tunti, kun uusi efemeridi otetaan käyttöön. Jos satelliitin paikka halutaan muuna ajanhetkenä, on tehtävä interpolointi, mikä aina heikentää tarkkuutta jonkin verran. Broadcast efemeridissä on sekin haittapuoli, että se kuvaa satelliitin antennin paikkaa, mutta liikeradan ratkaisua varten tarvittaisiin satelliitin massakeskipiste [20]. Näistä syistä tehdään tämän kappaleen testit broadcast-efemeridin lisäksi myös tarkemmalla precise-efemeridillä, joita on tarjolla erilaisten järjestöjen sivuilla. Ne ovat tarkempia ja ne on laskettu useimmiten satelliitin massakeskipisteen mukaan.

Broadcast-efemeridit ovat aina ennusteita, kun taas precise-efemeridit lasketaan sovittamalla satelliitin rata suureen määrään mittaustuloksia. Jotkut precise-efemeridit lasketaan reaaliajassa, osa saadaan muutaman tunnin viiveellä, mutta tarkimpien ratojen selvittelyyn menee noin kaksi viikkoa. Kaikkein tarkimpina siviilikäyttöön tarkoitettuina efemerideinä pidetään International GNSS Servicen (IGS) laskemia. Niiden tarkkuus on noin 2.5 cm (1D RMS-virhe) [21]. Nyt tässä työssä käytetään kuitenkin toisen järjestön, National Geospatial-Intelligence Agencyn (NGA) precise-efemeridejä, sillä näissä tiedostoissa on myös satelliitin nopeudet mukana valmiina [40]. Lähteestä [41] löytyy NGA:n ja IGS:in efemeridien vertailua,

ja uusimman vertailun mukaan niiden välinen RMS-virhe (eng. Root Mean Squared Error) on 0.113 m.

Sekä broadcast- että precise-efemeridien tarkkuus on parantunut jatkuvasti vuosien saatossa. Siksi onkin syytä käyttää mahdollisimman uutta dataa, vaikka verkossa onkin saatavilla satelliittien efemeridejä hyvin pitkältä ajalta. Tässä tehdyt testit on tehty GPS-viikkojen 1465-1550 efemeridien perusteella, mikä tarkoittaa helmikuun 2008 ja lokakuun 2009 välistä aikaa. Ennustuksen alkuaianhetki on joka viidennen GPS-viikon alkuhetki, mistä saadaan 18 alkuhetkeä yhteensä. Ennustukset tehdään aina kaikille 32:lle satelliitille, joten yhteensä ennusteita on $18 \cdot 32 = 576$. Tästä luvusta pitää tosin vähentää muutama, sillä tosinaan jokin satelliiteista on väliaikaisesti poissa käytöstä.

Kuvassa 5.1 on esitetty satelliitin paikkavirhe ennustuksen pituuden funktiona, kun alkupaikka ja -nopeus on otettu precise-efemeridistä. Precise-efemeridejä oli tarjolla 15 minuutin välein, joten interpoloinnin välttämiseksi ennustus aloitettiin aina yhdellä näistä ajanhetkistä. Ennustuksia tehtiin edellä mainitut 576 kappaletta ja tulos tallennettiin aina 15 minuutin välein. Näistä tallennetuista ajanhetkistä otettiin parhaat 50%, 75% ja 95% kullekin ajanhetkelle ja kuvaan on piirretty ne rajat, minkä alle ennustusvirheet jäivät.



Kuva 5.1: Satelliitin paikkavirhe, kun alkutila on precise-efemeridin mukainen. Ennustusvirheistä 50%, 75% ja 95% jäävät kuvan käyrien alle.

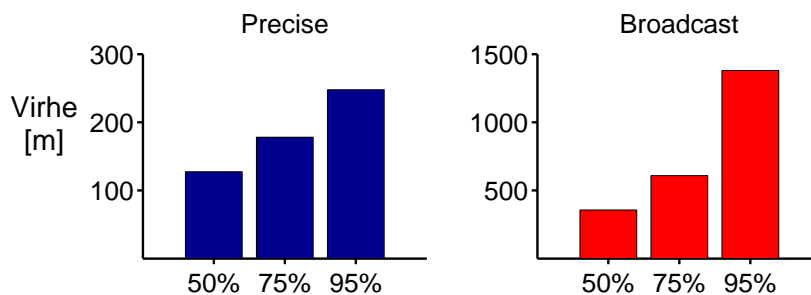
Kuvan 5.1 virhe tarkoittaa ennustetun paikan \vec{r}_i etäisyyttä precise-efemeridin antamaan paikkaan $\vec{r}_{i,PE}$. Kun myöhemmin tässä luvussa puhutaan keskimääräisestä virheestä, sillä tarkoitetaan paikkojen etäisyyksistä laskettua keskiarvoa

$$\frac{1}{n} \sum_i \|\vec{r}_i - \vec{r}_{i,PE}\|. \quad (5.1)$$

Virhe kasvaa oskilloiden 12 tunnin jaksoissa, mikä on se aika, jossa GPS-satelliitti ehtii kiertää kerran Maan ympäri. Syynä tähän on se, että satelliitit kiertävät Maata kuudella radalla, jotka ovat hyvin heikosti elliptisiä, eli lähes ympyröitä. Tämän geometrian ansiosta toiset häiriövoimat, kuten Kuun gravitaatio, liikuttavat

satelliittia Maan vastakkaisella puolella juuri päinvastaiseen suuntaan, kuin toisella puolella. Näin virheet kumoutuvat osittain. Toisinaan, kun puhutaan satelliitin paikkavirheestä, annetaan virhe kolmena komponenttina: säteen suuntaisena, radan suuntaisena ja ratatasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa. Näistä virhekomponenteista säteen suuntainen ja ratatasoa vastaan kohtisuora virhe ovat ne komponentit, jotka esimerkiksi Kuun aiheuttamassa häiriökiihtyvyydessä oskilloivat nollakekeisinä. Sen sijaan toiset voimat häiriöivät rataa jatkuvasti samaan suuntaan, jolloin häiriökiihtyvyyden vaikutus on suurempi. Näistä syistä eivät myöskään kappaleen 3.5 taulukossa olevien häiriökiihtyvyyksien vaikutukset ole aina samassa suuruusjärjestyksessä, kuin itse kiihtyvyydet.

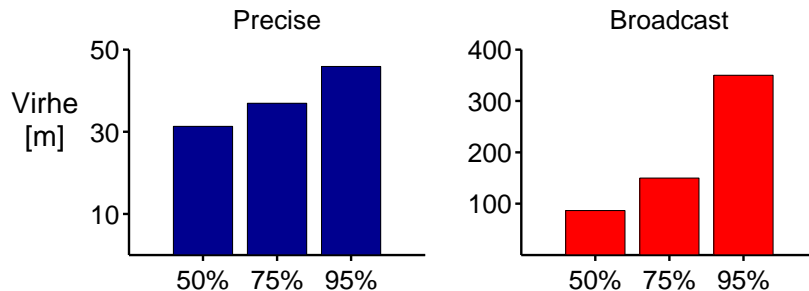
Työn tavoitteena oli tarkastella erityisesti yhden ja neljän vuorokauden mittaisia ennusteita, joten tarkastellaan niiden virheitä seuraavaksi erikseen. Kuvassa 5.2 on esitetty virhe neljän päivän mittaisessa ennusteessa. Virheen oskilloinnin takia tähän ei ole otettu virhettä neljän vuorokauden kohdalla, vaan suurin virhe koko ennusteen aikana. Tulokset on laskettu käyttäen alkutilana sekä precise-efemeridiä (PE) lähteestä [40] että broadcast-efemeridiä (BE) lähteestä [42]. Vaikka PE:n ja BE:n alkupaikkojen etäisyys oli keskimäärin vain 1.7 m, on tuloksissa kuitenkin huomattava ero. Tämä tarkoittaa, että malli on varsin herkkä alkutilan virheelle.



Kuva 5.2: Neljän vuorokauden ennustusvirhe

Kuvasta 5.3 näkyvät tulokset yhden päivän mittaiselle ennusteelle. Precise-efemeridillä tehty ennuste pysyy päivän ajan alle 50 metrissä, mikä olikin tässä työssä tavoitteena. Sen sijaan broadcast-efemeridillä tehdyt ennusteet jäävät paljon huonommiksi. Kuten aiemmin mainittiin, kertoo BE satelliitin antennin sijainnin, eikä massakeskipistettä, joten broadcast-efemeridin tulokset voisivat parantua jonkin verran, jos tiedettäisiin massakeskipisteen paikka antenniin nähden ja korjattaisiin BE:n antamaa alkupaikkaa tämän mukaan. Tämän lisäksi broadcast-efemeridiä voisi yrittää parantaa muilla keinoin ottamalla huomioon myös aikaisemmin vastaanotetut efemeridit.

Työn tarkoituksena oli laskea satelliitin paikka siten, että se voitaisiin tehdä paikannuslaitteessa ilman jatkuvaa verkkoyhteyttä. Verkkoyhteys on kuitenkin oltava aika ajoin, sillä tämän mallin käyttöön tarvitaan napavariaatioparametreja, joita ei voida ennustaa riittävällä tarkkuudella laitteen koko käyttöiäksi, joka on normaalisti vuosien mittainen. Napavariaatioista kerrottiin kappaleessa 2.3.3. Tämän luvun testeihin liittyen tulee huomata, että ainoastaan broadcast-efemeridi on laitteen käytössä ilman verkkoyhteyttä. Precise efemeridillä saatavat tulokset ovat



Kuva 5.3: Yhden vuorokauden ennustusvirhe

noin kertaluokkaa parempia, joten ilman verkkoyhteyttä tehtävissä ennusteissa pullonkaulana on selvästi alkutilan tarkkuus. Jos taas käytetään precise-efemeridiä, on alkupaikan tarkkuus paljon parempi, eikä se välttämättä ole enää pullonkaula, vaan mahdollisesti muut virheet rajoittavat ennustuksen tarkkuutta enemmän. Seuraavassa luvussa on pohdintaa ennustusvirheen koostumisesta precise-efemeridin tapauksessa.

5.2 Virhetekijöiden arviointia

Ennustusvirhe koostuu kolmesta osasta: mallin eli satelliitin liikeyhtälön virheestä, sen ratkaisuun liittyvästä numeerisesta virheestä sekä satelliitin alkutilan virheestä. Näistä numeerinen virhe on helpoimmin arvioitavissa, sillä kappaleessa 4.3 asetettiin differentiaaliyhtälön ratkaisijan aika-askel niin pieneksi, että numeerinen virhe jää alle metrin vuorokauden mittaisessa ennusteessa.

Mallin virhe syntyy siitä, että kaikkia satelliittiin vaikuttavia voimia ei ole voitu ottaa huomioon. Lisäksi mallin virheeseen voidaan laskea mukaan sellaiset virheet, jotka syntyvät koordinaatistojen suuntaamisvirheistä tai Kuun ja Auringon paikkakoordinaattien virheistä. Tarkoitus on kuitenkin ollut käyttää niin tarkkoja koordinaatistoja ja laskea taivaankappaleiden paikat niin tarkasti, että virhe olisi mitätön.

Kappaleen 3.5 taulukossa lueteltiin erilaisia satelliittiin vaikuttavia voimia, sekä niiden vaikutuksia satelliitin paikkaan. Tässä työssä huomioimme näistä voimista tärkeimmät. Taulukossa 5.1 on tarkasteltu mallin keskimääräistä virhettä, kun siitä jätetään jokin voima pois. Alimmalla rivillä on keskimääräinen virhe, kun kaikki voimat ovat mukana, vertailun vuoksi. On huomioitava, että nämä virheet eivät suoraan kuvaa voiman vaikutusta satelliitin paikkaan. Ne kertovat sen virheen, joka syntyy, kun jo valmiiksi epätarkasta mallista jätetään vielä yhden voiman vaikutus huomiotta. Luvut antavat kuitenkin jonkinlaista tietoa eri voimien vaikutuksesta. Taulukon 5.1 tulokset ovat myös samaa suuruusluokkaa kuin kirjallisuudessa esiintyvät arvot taulukossa 3.3. Ei ole tosin tarkempaa tietoa siitä, miten kirjallisuudessa esiintyvät arvot oli laskettu.

Taulukko 5.1: *Keskimääräisiä virheitä, kun mallista jätetään jokin tärkeä voima pois*

Poistettu voima	Virhe [m/vrk]	Virhe [m/4vrk]
Maan gravitaation Y_{02} -termi	25 000	110 000
Kuun gravitaatio	2100	7500
Auringon gravitaatio	900	3500
Gravitaatiotermit Y_{12} - Y_{44}	350	1600
Auringon säteilypaine	210	870
Gravitaatiotermit Y_{55} - Y_{88}	32	132
Ei mikään	32	131

Taulukon 5.1 toiseksi alimmalla rivillä on voimamallin antamat tulokset, kun mallissa huomioiduista palloharmonisista termeistä indeksiltään suurimmat termit Y_{55} - Y_{88} on jätetty pois. Tämä tarkoittaa, että gravitaatiokertoimet C_{55} - C_{88} ja S_{55} - S_{88} on asetettu nolliksi. Tulokset eroavat tällöin vain hyvin vähän siitä, jos kertoimet olisikin otettu huomioon. Voidaan päätellä, että mukaan otetut kertoimet kertalukuun ja asteeseen 8 ovat riittävät, eikä gravitaatiotermien rajallinen määrä aiheuta merkittävää virhettä.

Taulukossa 5.2 on tehty hieman taulukkoa 5.1 vastaava tarkastelu eri määrälle gravitaatiotermejä. Siinä on tarkasteltu keskimääräistä virhettä gravitaatiotermien määrän funktiona. Selvästi kaikki gravitaatiotermit asteeseen ja kertalukuun 4 on tarpeen huomioida. Tätä korkeampien asteiden termien korhdalla erot alkavat kuitenkin olla jo varsin pieniä. Vielä 5 asteen termit on ehkä syytä huomioida, sillä noin metrin ero keskiarvossa tarkoittaa, että toisissa ennusteissa virhe on kuitenkin useita metrejä.

Taulukko 5.2: *Gravitaatiotermien vaikutus keskimääräiseen virheeseen*

Korkein huomioitu Y	$Y_{2,2}$	$Y_{3,3}$	$Y_{4,4}$	$Y_{5,5}$	$Y_{6,6}$	$Y_{7,7}$	$Y_{8,8}$
Keskivirhe [m/4vrk]	588.76	199.72	131.36	130.60	130.76	130.55	130.59

Mietitään seuraavaksi, mistä kaikesta yhden vuorokauden keskimääräinen ennustusvirhe, 32 m, koostuu. Numeerinen virhe oli korkeintaan metrin luokkaa ja äsken todettiin, että gravitaatiokertoimia on huomioitu riittävästi, eikä siitä aiheudu merkittävää virhettä. Myös Kuun ja Auringon gravitaatiokiihtyvyyks on tarkka olettaen, että Kuun ja Auringon sijainnit on saatu laskettua riittävän tarkasti. Mallissa on jonkin verran virhettä, joka syntyy kun osa vaikuttavista voimista jätettiin huomiotta kappaleessa 3.5. Taulukosta 3.5 nähdään kuitenkin, että pois jätettyjen voimien vaikutukset ovat kaikki hyvin pieniä. Suurinpana näistä on y-bias ja senkin vaikutus satelliitin rataa on vain 2 metriä vuorokaudessa. Näiden päättelyiden perusteella 32 metrin virheestä suurimman osa tulisi koostua Auringon säteilypaine-mallin puutteista ja alkutilan epätarkkuudesta.

Säteilymallin puutteet tarkoittavat sitä, että lausekkeeseen (3.27) estimoitu vakio-parametri α ei ollut täysin vakio, vaan vaihteli ajan mukana. Parametri kuitenkin asetettiin satelliittikohtaiseksi vakioksi ottamalla aikakeskiarvo joukosta estimoituja arvoja (katso kappale 3.2). Lisäksi, kun satelliitti silloin tällöin joutuu Maan varjoon, säteilypaineen vaikutus lakkaa, ja tämän mallintamiseen tarkoitettu varjostus-funktio oli varsin yksinkertainen. Auringon säteilypaineen poisjättäminen kasvattaa virhettä taulukon 5.1 mukaan noin 200 m. Jos nyt arvioidaan, paljonko säteily-painemallin epätarkkuus vaikuttaa satelliitin paikkaan, niin 10% koko säteilypaineen vaikutuksesta, eli 20 metriä, kuulostaa ihan realistiselta. Säteilypaine voi hyvinkin olla suurimpia virhelähteitä.

Alkutilan epätarkkuus on toinen mahdollinen suurempi virhelähde. Edellisen kappaleen testeissä havaittiin, että epätarkemman broadcast-efemeridin käyttäminen alkutilana heikensi ennustuksen tarkkuutta kertaluokalla, vaikka alkupaikkojen ero oli keskimäärin vain 1.7 m. Jos palataan tarkastelemaan kuvaa 5.3, nähdään, että broadcast-efemeridin käyttö heikensi ennustuksen tarkkuutta yli sadalla metrillä. Käytetyn precise-efemeridin tarkkuus on oletettavasti 0.1 metrin suuruusluokkaa, kaavalla (5.1) laskettuna sen erotus IGS:n precise-efemeridiin oli 18 cm. Broadcast-efemeridin vaikutuksiin vertailemalla ei olisi ihme, vaikka näinkin pienestä virheestä seuraisi useiden metrien, tai yli kymmenenkin metrin virhe vuorokauden mittaiseen ennusteeseen.

Luku 6

Yhteenveto

Tämä työ tarkasteli GPS-satelliitin radan ennustamista. Ennustaminen tehtiin muodostamalla satelliitille liikeyhtälö, joten työhön on koottu kirjallisuudesta tietoa erilaisista satelliitin vaikuttavista voimista. Taivaankappaleiden fysiikan lisäksi työssä käsiteltiin myös laskennassa tarvittavia koordinaatistonmuunnoksia sekä liikeyhtälön ratkaisuun liittyviä numeerisia menetelmiä.

Työ keskittyy selittämään, kuinka satelliitin rata ylipäättään voidaan ratkaista, sillä siihenkin liittyy jo paljon selvitettävää ja huomioitavaa. Kuitenkin työn motivaationa on ollut kysymys, voisiko GPS-satelliitin rataa ennustaa erillisessä paikannuslaitteessa, missä ei ole jatkuvaa verkkoyhteyttä. Tämä nopeuttaisi paikannuslaitteen toimintaa sellaisessa tilanteessa, kun laite käynnistetään uudelleen sen oltua jonkin aikaa pois päältä. Jos laite edeltävällä käyttöjaksolla olisi ennustanut satelliittien radat valmiiksi, ei tarvitsisi odottaa satelliittien lähettämiä ratatietoja. Tällöin ensimmäinen paikkatieto saataisiin laskettua nopeasti, jopa 5 sekuntia laitteen käynnistymisen jälkeen, mistä olisi huomattava hyöty laitteen käyttäjälle.

Satelliitin radan ennustamiseksi esitettiin malli, joka ei käytä apuna sellaista tietoa, mikä on paikannuslaitteen ulottumissa. Toisissa koordinaatistonmuunnoksissa on tosin käytetty parametreja, joita ei vielä nykyisestä satelliittien lähettämästä navigointiviestistä löydy. Ne löytyvät kuitenkin lähitulevaisuudessa käyttöön otettavan modernisoidun GPS:n navigointiviestistä. Mallia testattiin ainoastaan tietokoneella, joten laitteen muisti- tai laskentatehorajoituksia ei ole voitu ottaa tässä huomioon.

Radan ennustamiseen esitettyä mallia testattiin MATLAB-ohjelmistolla, käyttäen apuna satelliitin oikeita paikka- ja nopeustietoja, eli efemeridejä, joita erilaiset laitokset, kuten National Geospatial-Intelligence Agency (NGA), tarjoavat verkossa. Testit tehtiin sekä broadcast-efemerideillä, jotka ovat satelliittien itsensä lähettämiä ratatietoja, että tarkemmilla precise-efemerideillä, jotka lasketaan mittaustuloksia apuna käyttäen vasta jälkikäteen. Tarkemmilla alkutiedoilla tehdyt ennusteet onnistuivat kertomaan satelliitin paikan alle 50 metrin virheellä, kun ennustuksen pituus oli yksi vuorokausi. Tämä 50 m asetettiin työn alussa tavoitteeksi, joten voidaan

todeta malli sinänsä onnistuneeksi. Ongelmana on, että paikannuslaitteessa sama ennustus pitäisi tehdä satelliittien lähettämiä epätarkempia efemeridejä käyttäen, ja tällöin virhe kasvaa miltei kertaluokkaa suuremmaksi. Lisäksi, vaikka tarkempaa efemeridiä olisikin mahdollista käyttää, olisi ennustuksen hyvä onnistua pidemmäksi ajaksi kuin vain vuorokaudeksi eteenpäin — eihän käyttäjä välttämättä avaa laitettaan ihan joka päivä.

Koska satelliitin lähettämän broadcast-efemeridin tarkkuus osoittautui ennustuksen pullonkaulaksi, mahdollisissa jatkotutkimuksissa kannattaisi selvittää, voisiko alkutilan tarkkuutta parantaa jollakin tavalla. Toisaalta, jos oletetaan, että paikannuslaitteeseen on mahdollista lähettää tarkan efemeridin mukainen alkutila edes aika ajoin, voidaan jatkotutkimuksissa keskittyä ennustustarkkuuden parantamiseen. Ennustustarkkuutta voitaisiin varmasti parantaa liittämällä malliin fysikaalisten voimien rinnalle myös dataan sovitettuja voimia. Tässä tosin voi tulla vastaan laitteen rajallinen muisti- ja laskentakapasiteetti.

Saaduissa tuloksissa tarkasteltiin ainoastaan ennustamalla saatua satelliitin paikkavirhettä, mutta sen vaikutusta paikannusvirheeseen ei tutkittu. Tämä olisi myös yksi mielenkiintoinen jatkotutkimusaihe, sillä sen jälkeen tuloksia saataisiin paremmin vertailtua muihin ratkaisuihin.

Työn varsinainen päämäärä, eli satelliitin radan ennustaminen paikannuslaitteessa ilman verkkoyhteyttä, vaikuttaa tämän työn valossa melko ongelmalliselta. Ennustuksessa esiin tulleiden ongelmien perusteella voidaan kuitenkin arvioida sopivia jatkotoimenpiteitä. Voidaan harkita, kannattaako resurssit keskittää uusien vaihtoehtoisten ennustusmallien kehittämiseen, tässä esitetyn mallin ongelmien kiertämiseen vai kannattako mieluummin vain muuttaa tavoitteita.

Kirjallisuutta

- [1] Ali-Löytty, S., Collin, J., Leppäkoski, H., Sairo, H., ja Sirola, N. Paikannuksen matematiikka, 2008. Opintomoniste.
- [2] Arfken, G. and Weber, H. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, San Diego (CA), 5th edition, 2001. 1112 p.
- [3] Berry, M. M. *A Variable-Step Double-Integration Multi-Step Integrator*. PhD thesis, Virginia Tech, Blacksburg, VA, 2004. Available at: <http://scholar.lib.vt.edu/theses/available/etd-04282004-071227/>.
- [4] Berry, M. M. and Healy, L. M. Speed and accuracy tests of the variable-step Störmer-Cowell integrator. In *Proceedings of the AAS/AIAA 15th Space Flight Mechanics Meetings held Jan. 23-27, 2005*, pages 1167 –1182.
- [5] Berry, M. M. and Healy, L. M. Implementation of Gauss-Jackson integration for orbit propagation. *The Journal of the Astronautical Sciences*, 52(3):331–357, July–September 2004.
- [6] Borre, K., Syrjärinne, J., Wirola, L., Lohan, S., Hurskainen, H., and Pesonen, H. Wireless positioning - challenges and solutions for ubiquitous navigation. Summer course 19-21.8.2009, lecture notes.
- [7] Bretagnon, P. and Francou, G. Planetary theories in rectangular and spherical variables — VSOP 87 solutions. *Astronomy and Astrophysics*, 202(1-2):309–315, August 1988.
- [8] Casotto, S. and Fantino, E. Evaluation of methods for spherical harmonic synthesis of the gravitational potential and its gradients. *Advances in Space Research*, 40:69–75, 2007.
- [9] Chao, B. F. Predictability of the Earth’s polar motion. *Journal of Geodesy*, 59(1), November 1985.
- [10] Cunningham, L. On the computation of the spherical harmonic terms needed during the numerical integration of the orbital motion of an artificial satellite. *Celestial Mechanics*, 2:207–216, 1970.
- [11] Dormand, J. R., El-Mikkawy, M. E. A., and Prince, P. J. High-order embedded Runge-Kutta-Nystrom formulae. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 7(4):423–430, 1987.

- [12] Fox, K. Numerical integration of the equations of motion of celestial mechanics. *Celestial Mechanics*, 33(2):127–142, June 1984.
- [13] Garin, L. US Patent 7548200 — Ephemeris extension method for GNSS applications. <http://www.patentstorm.us/patents/7548200/description.html>.
- [14] Grewal, M. S. and Andrews, A. P. *Kalman filtering: Theory and Practice*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1st edition, 1993. 381 p.
- [15] Hairer, E., Lubich, C., and Wanner, G. *Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1st edition, 2002. 515 p.
- [16] Hairer, E., Nørsett, S. P., and Wanner, G. *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. Springer-Verlag, Berlin, 2nd revised edition, 1993. 528 p.
- [17] Holmes, S. A. and Featherstone, W. E. A unified approach to the Clenshaw summation and the recursive computation of very high degree and order normalised associated Legendre functions. *Journal of Geodesy*, 76:279–299, 2002.
- [18] Höpfner, J. Low-frequency variations, Chandler and annual wobbles of polar motion as observed over one century. *Surveys in Geophysics*, 25(1):1–54, January 2004.
- [19] International Earth Rotation and Reference Systems Service Homepage. www.iers.org. Standard Rapid EOP Data since 01. January 1992 (IAU2000): <http://www.iers.org/products/10/1382/orig/finals2000A.data> Format description: <http://maia.usno.navy.mil/ser7/readme.finals2000A> EOP C 04_05 series of the Earth orientation parameters with respect to IAU2000A precession/nutation model: http://hpiers.obspm.fr/eoppc/eop/eopc04_05/eopc04_IAU2000.62-now [www; referred 23-October-2009].
- [20] A guide to using International GPS Service (IGS) products. [www; referred 19-December-2009] <http://igscb.jpl.nasa.gov/igscb/resource/pubs/GuidetoUsingIGSProducts.pdf>.
- [21] IGS Products and their accuracy. [www; referred 19-December-2009] <http://igscb.jpl.nasa.gov/components/prods.html>.
- [22] Jazwinski, A. H. *Stochastic Processes and Filtering Theory*, volume 64. Academic Press, New York, 1st edition, 1970. 378 p.
- [23] Karttunen, H. Karttusen ylläpitämä tähtitieteellinen sanasto ja kokoelma tähtitieteellisiä tekstejä, [www; haettu 17-heinäkuu-2009] <http://www.astro.utu.fi/zubi/>, <http://www.astro.utu.fi/zubi/time>.
- [24] Kibble, T. W. B. and Berkshire, F. H. *Classical mechanics*. Imperial College Press, London, 5th edition, 2004. 478 p.

- [25] Kosek, W., McCarthy, D., and Luzum, B. El Niño impact on polar motion prediction errors. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 45(4):347–361, 2001.
- [26] Kramer, H. J. *Observation of the earth and its environment: survey of missions and sensors*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 4th edition, 2002. 1510 p.
- [27] Lundberg, J. Multistep integration formulas for the numerical integration of the satellite problem. Tech. Rep. IASOM TR 81-1, Center for Space Research, The University of Texas at Austin, Austin, TX, April 1981.
- [28] Mansfield, M. and O’Sullivan, C. *Understanding Physics*. John Wiley & Sons, Chichester, 1st edition, 1998. 755 p.
- [29] Mattos, P. G. Self-assisted GPS. *GPS World*, 19:50–56, September 2008.
- [30] McCarthy, D. D. and Petit, G. Iers conventions (2003). IERS Technical Note 32, Central Bureau of IERS - Observatoire de Paris, Frankfurt an Main, 2004. <http://www.iers.org/iers/publications/tn/tn32/>.
- [31] Merson, R. H. Numerical integration of the differential equations of celestial mechanics. Tech. rep. TR 74184, Royal Aircraft Establishment, Farnborough, Hants, UK, January 1975. Defense Technical Information Center number AD B004645.
- [32] Misra, P. and Enge, P. *Global Positioning System: Signals, Measurements, and Performance*. Ganga-Jamuna Press, Lincoln (MA), 2nd edition, 2006. 569 p.
- [33] Montenbruck, O. Numerical integration methods for orbital motion. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 53:59–69, 1992.
- [34] Montenbruck, O. and Gill, E. *Satellite Orbits*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 3rd edition, 2005. 369 p.
- [35] Métris, G., Xu, J., and Wytrzyszczak, I. Derivatives of the gravity potential with respect to rectangular coordinates. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 71(2):137–151, 1999.
- [36] NIMA (2000): Department of Defence World Geodetic System 1984, Its Definition and Relationships with Local Geodetic Systems. Technical Report, NIMA TR8350.2. Third Edition, Amendment 1, 3 Jan. 2000 [www; referred 23-October-2009] <http://earth-info.nga.mil/GandG/publications/tr8350.2/wgs84fin.pdf>.
- [37] Navstar Global Position System Interface Specification, Navstar GPS Space Segment/User Segment L1C Interfaces Draft IS-GPS-800, CA: Arinc Engineering Service LLC, 19 Apr 2006. [www; referred 20-January-2010] http://www.navcen.uscg.gov/gps/modernization/L1/IS-GPS-800_19_DRAFT_Apr06.pdf.

- [38] Navstar Global Position System Interface Specification, Navstar GPS Space Segment/Navigation User Interface IS-GPS-200 Revision D[R], CA: Arinc Engineering Service LLC, 7 Dec 2004. [www; referred 20-January-2010] <http://www.navcen.uscg.gov/gps/geninfo/IS-GPS-200D.pdf>.
- [39] Navstar Global Position System Interface Specification, Navstar GPS Space Segment/User Segment L5 Interfaces IS-GPS-705, CA: Arinc Engineering Service LLC. [www; referred 20-January-2010] <http://www.navcen.uscg.gov/gps/modernization/Number.pdf>.
- [40] NGA: Precise ephemeris files published by National Geospatial-Intelligence Agency. [www; referred 23-October-2009] <ftp://ftp.nga.mil/pub2/gps/pedata/>.
- [41] NGA/IGS GPS Orbit (Ephemeris) Comparison Page. [www; referred 19-December-2009] <http://earth-info.nga.mil/GandG/sathtml/ngaigscompare.html>.
- [42] NGS: Broadcast ephemeris files published by National Geodetic Survey. [www; referred 21-December-2009] <ftp://www.ngs.noaa.gov/cors/rinex>.
- [43] Ofek, E. O. Matlab code for calculating planetary coordinates using vsop87 theory, 2001. [ftp; referred 7-January-2010] ftp://wise-ftp.tau.ac.il/pub/eran/matlab/Ephem/VSOP87/calc_vsop87.m.
- [44] An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008, presented at the 2008 General Assembly of the European Geosciences Union, Vienna, Austria, April 13-18, 2008. http://earth-info.nima.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/first_release.html.
- [45] Perttula, A. Lineaarialgebraa, 1999. Opintomoniste.
- [46] Poutanen, M. Satelliittipaikannus-kirjan käsikirjoitusta, luvut 1-3 (ositain), 2007. [www; haettu 1-heinäkuu-2009], <http://www.fgi.fi/~mp/tiedostot/gpskirja.pdf>.
- [47] Ristic, B., Arulampalam, S., and Gordon, N. *Beyond the Kalman Filter: Particle filters for tracking applications*. Artech House, Boston, London, 1st edition, 2004. 299 p.
- [48] Ruohonen, K. Vektorikentät. Tampereen Teknillinen Yliopisto, 2006. Opetusmoniste No 4. Päivitetty versio verkossa: <http://math.tut.fi/ruohonen/VK.pdf>.
- [49] Rx Networks:n kotisivu. [www; haettu 20-Marraskuu-2009] http://www.rxnetworks.ca/products/gpstream_sagps.aspx.
- [50] Santos, M. C. Real-time orbit improvements for GPS satellites, Ph.D. dissertation, Department of Geodesy and Geomatics Engineering. Technical Report No. 178, University of New Brunswick, Fredericton, New Brunswick, Canada, 1995. 125 pp. gge.unb.ca/Pubs/TR178.pdf.
- [51] Schuh, H., Nagel, S., and Seitz, T. Linear drift and periodic variations observed in long time series of polar motion. *Journal of Geodesy*, 74(10), March 2001.

- [52] Seeber, G. *Satellite Geodesy*. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2nd revised edition, 2003. 589 p.
- [53] Simon, D. *Optimal state estimation*. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey and Canada, 1st edition, 2006. 526 p.
- [54] SiRF:in kotisivu. [www; haettu 20-Marraskuu-2009] http://www.sirf.com/products/location2_services.html.
- [55] Syrjärinne, J. *Studies of Modern Techniques for Personal Positioning*. PhD thesis, Tampere University of Technology, Tampere, 2001.
- [56] Taff, L. G. *Computational Spherical Astronomy*. John Wiley & Sons, New York, 1st edition, 1981. 233 p.
- [57] 3GPP TS 44.031, Radio Resource LCS (Location Services) Protocol (RRLP), <http://www.3gpp.org>.
- [58] United States Naval Observatory (USNO) Block II satellite information. Information about operational GPS satellites, [www; referred 27-October-2009] <ftp://tycho.usno.navy.mil/pub/gps/gpsb2.txt>.
- [59] VSOP87 theory files [ftp; referred 7-January-2010] used files: vsop87a.emb.mat, vsop87e.ear.mat and vsop87e.sun.mat
<ftp://wise-ftp.tau.ac.il/pub/eran/matlab/Ephem/VSOP87/>.
- [60] Weng, C.-T., Chien, Y.-C., Fu, C.-L., and Yau, W.-G. MediaTek Inc., Taiwan. a broadcast ephemeris extension method for standalone mobile apparatus. In *ION GNSS 2009*, Savannah International Convention Center Savannah, Georgia, September 22-25 2009.
- [61] Zhang, W., Venkatasubramanian, V., Liu, H., Phatak, M., and Han, S. SiRF InstantFix II Technology. In *Proceedings of the 21st International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation ION GNSS 2008*, pages 1840 – 1847, Savannah International Convention Center Savannah, Georgia, September 16 - 19 2008.
- [62] Ziebart, M., Cross, P., and Adhya, S. Modeling photon pressure: The key to high-precision GPS satellite orbits. *GPS World*, 13:43–48, January 2002.

Liite A

Kovarianssimatriiseja

Luvun 3.4 estimoinnissa käytettyjä kovarianssimatriiseja.

Mittausmallin kovarianssimatriisi:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{pmatrix}$$

Tilamallin kovarianssimatriisi:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-9} \end{pmatrix}$$

Alkutilan kovarianssimatriisi

$$\mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 \end{pmatrix}$$

Liite B

Kertaluvun 12

Nyström-menetelmä

```
c = [0.0e0    2.0e-2   4.0e-2   1.0e-1   1.3333333333333333333333333333e-1  
1.6e-1   5.0e-2   2.0e-1   2.5e-1   3.3333333333333333333333333333e-1   5.0e-1  
5.55555555555555555555555555555555555555555555555e-1 7.5e-1 8.57142857142857142857142857143e-1  
9.45216222272014340129957427739e-1 1.0e0 1.0e0];
```

$$\mathbf{A}(2,1:1) = 2.0\text{e-}4;$$
$$\mathbf{A}(3,1:2) = [2.6666666666666666666666666667\text{e-}4 \\ 5.333333333333333333333333333\text{e-}4];$$
$$\mathbf{A}(4,1:3) = [2.9166666666666666666666667e-3 \\ -4.1666666666666666666666666666667e-3 \ 6.25e-3];$$
$$\mathbf{A}(5,1:4) = [1.64609053497942386831275720165\text{e-}3 \quad 0.0\text{e}0 \\ 5.48696844993141289437585733882\text{e-}3 \quad 1.75582990397805212620027434842\text{e-}3];$$
$$\begin{aligned} \mathbf{A}(6,1:5) &= [1.9456\text{e-}3 \quad 0.0\text{e}0 \quad 7.15174603174603174603174603175\text{e-}3 \\ &\quad 2.9127111111111111111111111111111111\text{e-}3 \quad 7.89942857142857142857142857143\text{e-}4]; \end{aligned}$$
$$\mathbf{A}(7,1:6) = [5.6640625\text{e-}4 \ 0.0\text{e}0 \ 8.80973048941798941798941798942\text{e-}4 \\ -4.36921296296296296296296296296\text{e-}4 \quad 3.39006696428571428571428571429\text{e-}4 \\ -9.94646990740740740740740740741\text{e-}5];$$
$$\begin{aligned} \mathbf{A}(8,1:7) &= [3.0833333333333333333333333333\text{e-}3 \quad 0.0\text{e}0 \quad 0.0\text{e}0 \\ &\quad 1.7777777777777777777777777778\text{e-}3 \quad 2.7\text{e-}3 \quad 1.578282828282828282828282828\text{e-}3 \\ &\quad 1.0860606060606060606060606060\text{e-}2]; \end{aligned}$$
$$\mathbf{A}(9,1:8) = \begin{bmatrix} 3.65183937480112971375119150338\text{e-}3 & 0.0\text{e}0 \\ 3.96517171407234306617557289807\text{e-}3 & 3.19725826293062822350093426091\text{e-}3 \\ 8.22146730685543536968701883401\text{e-}3 & -1.31309269595723798362013884863\text{e-}3 \\ 9.77158696806486781562609494147\text{e-}3 & 3.75576906923283379487932641079\text{e-}3 \end{bmatrix};$$

$\mathbf{A}(10,1:9) = [3.70724106871850081019565530521\text{e-}3 \quad 0.0\text{e}0$
 $5.08204585455528598076108163479\text{e-}3 \quad 1.17470800217541204473569104943\text{e-}3$
 $-2.11476299151269914996229766362\text{e-}2 \quad 6.01046369810788081222573525136\text{e-}2$
 $2.01057347685061881846748708777\text{e-}2 \quad -2.83507501229335808430366774368\text{e-}2$
 $1.48795689185819327555905582479\text{e-}2];$

$\mathbf{A}(11,1:10) = [3.51253765607334415311308293052\text{e-}2 \quad 0.0\text{e}0$
 $-8.61574919513847910340576078545\text{e-}3 \quad -5.79144805100791652167632252471\text{e-}3$
 $1.94555482378261584239438810411\text{e}0 \quad -3.43512386745651359636787167574\text{e}0$
 $-1.09307011074752217583892572001\text{e-}1 \quad 2.3496383118995166394320161088\text{e}0$
 $-7.56009408687022978027190729778\text{e-}1 \quad 1.09528972221569264246502018618\text{e-}1];$

$\mathbf{A}(12,1:11) = [2.05277925374824966509720571672\text{e-}2 \quad 0.0\text{e}0$
 $-7.28644676448017991778247943149\text{e-}3 \quad -2.11535560796184024069259562549\text{e-}3$
 $9.27580796872352224256768033235\text{e-}1 \quad -1.65228248442573667907302673325\text{e}0$
 $-2.10795630056865698191914366913\text{e-}2 \quad 1.20653643262078715447708832536\text{e}0$
 $-4.13714477001066141324662463645\text{e-}1 \quad 9.07987398280965375956795739516\text{e-}2$
 $5.3555260053398504916870658215\text{e-}3];$

$\mathbf{A}(13,1:12) = [-1.43240788755455150458921091632\text{e-}1 \quad 0.0\text{e}0$
 $1.25287037730918172778464480231\text{e-}2 \quad 6.82601916396982712868112411737\text{e-}3$
 $-4.79955539557438726550216254291\text{e}0 \quad 5.69862504395194143379169794156\text{e}0$
 $7.55343036952364522249444028716\text{e-}1 \quad -1.27554878582810837175400796542\text{e-}1$
 $-1.96059260511173843289133255423\text{e}0 \quad 9.18560905663526240976234285341\text{e-}1$
 $-2.38800855052844310534827013402\text{e-}1 \quad 1.59110813572342155138740170963\text{e-}1];$

$\mathbf{A}(14,1:13) = [8.04501920552048948697230778134\text{e-}1 \quad 0.0\text{e}0$
 $-1.66585270670112451778516268261\text{e-}2 \quad -2.1415834042629734811731437191\text{e-}2$
 $1.68272359289624658702009353564\text{e}1 \quad -1.11728353571760979267882984241\text{e}1$
 $-3.37715929722632374148856475521\text{e}0 \quad -1.52433266553608456461817682939\text{e}1$
 $1.71798357382154165620247684026\text{e}1 \quad -5.43771923982399464535413738556\text{e}0$
 $1.38786716183646557551256778839\text{e}0 \quad -5.92582773265281165347677029181\text{e-}1$
 $2.96038731712973527961592794552\text{e-}2];$

$\mathbf{A}(15,1:14) = [-9.13296766697358082096250482648\text{e-}1 \quad 0.0\text{e}0$
 $2.41127257578051783924489946102\text{e-}3 \quad 1.76581226938617419820698839226\text{e-}2$
 $-1.48516497797203838246128557088\text{e}1 \quad 2.15897086700457560030782161561\text{e}0$
 $3.99791558311787990115282754337\text{e}0 \quad 2.84341518002322318984542514988\text{e}1$
 $-2.52593643549415984378843352235\text{e}1 \quad 7.7338785423622373655340014114\text{e}0$
 $-1.8913028948478674610382580129\text{e}0 \quad 1.00148450702247178036685959248\text{e}0$
 $4.64119959910905190510518247052\text{e-}3 \quad 1.12187550221489570339750499063\text{e-}2];$

$\mathbf{A}(16,1:15) = [-2.75196297205593938206065227039\text{e-}1 \quad 0.0\text{e}0$
 $3.66118887791549201342293285553\text{e-}2 \quad 9.7895196882315626246509967162\text{e-}3$
 $-1.2293062345886210304214726509\text{e}1 \quad 1.42072264539379026942929665966\text{e}1$
 $1.58664769067895368322481964272\text{e}0 \quad 2.45777353275959454390324346975\text{e}0$
 $-8.93519369440327190552259086374\text{e}0 \quad 4.37367273161340694839327077512\text{e}0$

-1.83471817654494916304344410264e0 1.15920852890614912078083198373e0
 -1.72902531653839221518003422953e-2 1.93259779044607666727649875324e-2
 5.20444293755499311184926401526e-3];

$\mathbf{A}(17,1:16) = [1.30763918474040575879994562983e0 \quad 0.0e0$
 1.73641091897458418670879991296e-2 -1.8544456454265795024362115588e-2
 1.48115220328677268968478356223e1 9.38317630848247090787922177126e0
 -5.2284261999445422541474024553e0 -4.89512805258476508040093482743e1
 3.82970960343379225625583875836e1 -1.05873813369759797091619037505e1
 2.43323043762262763585119618787e0 -1.04534060425754442848652456513e0
 7.17732095086725945198184857508e-2 2.16221097080827826905505320027e-3
 7.00959575960251423699282781988e-3 0.0e0];

$\bar{\mathbf{b}} = [1.21278685171854149768890395495e-2 \quad 0.0e0 \quad 0.0e0 \quad 0.0e0 \quad 0.0e0 \quad 0.0e0$
 8.62974625156887444363792274411e-2 2.52546958118714719432343449316e-1
 -1.97418679932682303358307954886e-1 2.03186919078972590809261561009e-1
 -2.07758080777149166121933554691e-2 1.09678048745020136250111237823e-1
 3.80651325264665057344878719105e-2 1.16340688043242296440927709215e-2
 4.65802970402487868693615238455e-3 0.0e0 0.0e0];

$\mathbf{b} = [1.21278685171854149768890395495e-2 \quad 0.0e0 \quad 0.0e0 \quad 0.0e0 \quad 0.0e0 \quad 0.0e0$
 9.08394342270407836172412920433e-2 3.15683697648393399290429311645e-1
 -2.63224906576909737811077273181e-1 3.04780378618458886213892341513e-1
 -4.15516161554298332243867109382e-2 2.46775609676295306562750285101e-1
 1.52260530105866022937951487642e-1 8.14384816302696075086493964505e-2
 8.50257119389081128008018326881e-2 -9.15518963007796287314100251351e-3
 2.5e-2];